Lernzettel - Flächeninhalt von Dreiecken und Parallelogrammen

Klasse: Klasse 6

Aus dem Flächeninhalt des Rechtecks lassen sich die Flächen von Parallelogramm und Dreieck herleiten. Du lernst die Formeln und wendest sie auf zusammengesetzte Figuren an.

Einstieg: Das Gartenbeet

Herr Albrecht möchte im Garten ein neues Beet anlegen, und zwar dreieckig, damit die Ecke zwischen Zaun und Weg nicht leer bleibt. Er muss wissen, wie viel Erde er braucht und wie viel Rasensamen für den Rest übrig bleibt. Dafür braucht er den Flächeninhalt. Du kennst schon Rechteck und Quadrat. In diesem Kapitel lernst du, den Flächeninhalt von Parallelogramm und Dreieck zu berechnen, Flächeneinheiten umzurechnen und zusammengesetzte Figuren in Teilflächen zu zerlegen. Der Schlüssel dazu ist die **Höhe**, und die ist nicht immer eine Seite der Figur.

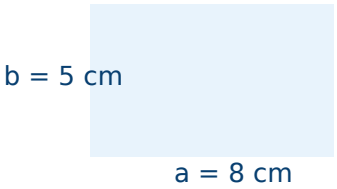
Wiederholung: Rechteck und Quadrat

Definition: Flächeninhalt

Der **Flächeninhalt** A sagt, wie viel Platz eine ebene Figur einnimmt. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm hat den Flächeninhalt 1 cm².

Regel: Rechteck und Quadrat

Rechteck: $A = a \cdot b$. Quadrat: $A = a \cdot a = a^2$.



Beispiel 1: Rechteck

Ein Rechteck ist 8 cm lang und 5 cm breit. Wie groß ist die Fläche?

$A = 8\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm} = 40\ \text{cm}^2$.

Einheiten für Flächen

Merke: Flächeneinheiten

Bei Flächeneinheiten ist der Umrechnungsfaktor **100**, nicht 10: $1\ \text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$, $1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2$, $1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$. Außerdem gilt $1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$, $1\ \text{ha} = 100\ \text{a} = 10\,000\ \text{m}^2$, $1\ \text{km}^2 = 100\ \text{ha}$.

Einheit	Umrechnung
mm² → cm² → dm² → m²	jeweils : 100
m² → dm² → cm² → mm²	jeweils · 100
m² → a → ha → km²	jeweils : 100

Das Parallelogramm

Definition: Höhe

Die **Höhe h** eines Parallelogramms ist der senkrechte Abstand zweier paralleler Seiten. Sie steht **senkrecht** auf der Grundseite g und ist nicht die schräge Seite.



Regel: Fläche des Parallelogramms

$A = g \cdot h$. Man kann das Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln: Schneide an einer Seite ein rechtwinkliges Dreieck ab und setze es an der gegenüberliegenden Seite wieder an.

Hinweis

Du kannst jede Seite als Grundseite wählen, musst dann aber die dazugehörige Höhe nehmen. Das Ergebnis ist immer dasselbe.

Beispiel 2: Parallelogramm

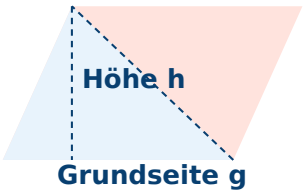
Ein Parallelogramm hat $g = 12{,}5\ \text{cm}$ und $h = 6\ \text{cm}$.

$A = 12{,}5 \cdot 6 = 75\ \text{cm}^2$.

Das Dreieck

Regel: Fläche des Dreiecks

$A = \frac{g \cdot h}{2}$. Zwei gleich große Dreiecke, das eine um 180° gedreht, bilden ein Parallelogramm mit Grundseite g und Höhe h. Ein Dreieck ist daher halb so groß.



Hinweis

Die Höhe steht senkrecht auf der Grundseite (bei stumpfwinkligen Dreiecken auf ihrer Verlängerung). Beim rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten Grundseite und Höhe zugleich.

So gehst du vor: Dreiecksfläche berechnen

1. Wähle eine Seite als Grundseite g.
2. Zeichne die dazugehörige Höhe h senkrecht ein und lies ihre Länge ab.
3. Rechne $A = g \cdot h : 2$ und schreibe die Einheit dazu.

Gesuchte Größe berechnen

Regel: Umkehren

Parallelogramm: $h = \frac{A}{g}$. Dreieck: $h = \frac{2 \cdot A}{g}$ bzw. $g = \frac{2 \cdot A}{h}$.

Beispiel 3: Grundseite gesucht

Ein Dreieck hat $A = 36\ \text{cm}^2$ und die Höhe $h = 8\ \text{cm}$. Wie lang ist g?

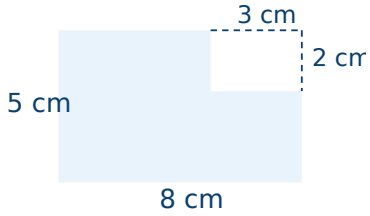
Aus $A = g \cdot h : 2$ folgt $g = 2 \cdot A : h = 72\ \text{cm}^2 : 8\ \text{cm} = 9\ \text{cm}$.

Zusammengesetzte Figuren

So gehst du vor: Zusammengesetzte Figuren

1. Zeichne eine saubere Skizze mit allen Maßen.
2. Zerlege die Figur in Rechtecke, Parallelogramme und Dreiecke.

3. Berechne die Teilflächen und addiere sie. Oder ergänze zu einem größeren Rechteck und ziehe die fehlenden Stücke ab.



Beispiel 4: Rechteck mit Dreieck

Eine Figur besteht aus einem Rechteck (8 cm · 5 cm) und einem aufgesetzten Dreieck mit $g = 8\ \text{cm}$ und $h = 3\ \text{cm}$.

Rechteck: 40 cm². Dreieck: $8 \cdot 3 : 2 = 12\ \text{cm}^2$. Gesamtfläche: $40 + 12 = 52\ \text{cm}^2$.

Beispiel 5: Fliesen im Bad

Ein Boden ist 4,2 m lang und 3 m breit. Eine Fliese misst 30 cm · 30 cm. Wie viele Fliesen braucht man?

Boden: $4{,}2 \cdot 3 = 12{,}6\ \text{m}^2$. Fliese: $900\ \text{cm}^2 = 0{,}09\ \text{m}^2$. Anzahl: $12{,}6 : 0{,}09 = 140$. In der Praxis kauft man wegen Verschnitt etwas mehr.

Die Höhe richtig bestimmen

Definition: Höhe

Die **Höhe** h einer Figur ist der kürzeste Abstand einer Seite (der Grundseite g) zur gegenüberliegenden Ecke oder Seite. Sie steht immer senkrecht auf der Grundseite, also im rechten Winkel. Im Dreieck gehört zu jeder der drei Seiten eine eigene Höhe.

So gehst du vor: Höhe einzeichnen

1. Wähle eine Seite als Grundseite.
2. Lege das Geodreieck so an, dass seine Mittellinie auf der Grundseite liegt.
3. Verschiebe es bis zur gegenüberliegenden Ecke und zeichne die Senkrechte von der Ecke zur Grundseite (oder ihrer Verlängerung).
4. Miss die Länge der Höhe.



Bei einem stumpfwinkligen Dreieck liegt die Höhe oft außerhalb des Dreiecks. Du verlängerst dann die Grundseite und fällst das Lot von der Ecke C auf diese Verlängerung.

Warum die Formeln stimmen

Merke: Herleitung der Formeln

Schneidest du vom Parallelogramm ein rechtwinkliges Dreieck ab und setzt es auf der anderen Seite an, entsteht ein Rechteck mit gleicher Grundseite und Höhe. Darum gilt $A = g \cdot h$. Ein Dreieck ist genau die Hälfte eines Parallelogramms mit gleicher Grundseite und Höhe, deshalb $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Beispiel 6: Dreieck mit verschiedenen Höhen

Ein Dreieck hat die Grundseite $g = 8$ cm und die Höhe $h = 6$ cm. Berechne den Flächeninhalt und die Höhe zur Grundseite 12 cm.

$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24\,\text{cm}^2$. Zur Grundseite 12 cm: $24 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h$, also $h = 24 \cdot 2 : 12 = 4$ cm. Dasselbe Dreieck hat zu jeder Grundseite eine andere Höhe, aber immer denselben Flächeninhalt.

Flächeneinheiten umrechnen

Regel: Umrechnungszahl 100

Bei Flächen ist die Umrechnungszahl 100: $1\,\text{m}^2 = 100\,\text{dm}^2 = 10\,000\,\text{cm}^2$, $1\,\text{cm}^2 = 100\,\text{mm}^2$. Für Felder und Grundstücke gibt es besondere Einheiten: 1 Ar $= 100\,\text{m}^2$, 1 Hektar $= 100$ Ar $= 10\,000\,\text{m}^2$, $1\,\text{km}^2 = 100$ ha.

Beispiel 7: Einheiten umrechnen

Rechne um: a) $3{,}5\,\text{m}^2$ in dm^2, b) $0{,}4$ ha in m^2, c) $2\,500\,\text{cm}^2$ in m^2.

a) $3{,}5 \cdot 100 = 350\,\text{dm}^2$. b) $0{,}4 \cdot 10\,000 = 4000\,\text{m}^2$. c) $2500 : 10\,000 = 0{,}25\,\text{m}^2$.

Flächen im Maßstab

Beispiel 8: Auf der Karte

Auf einer Karte im Maßstab $1:1000$ ist ein rechteckiger Platz 3 cm lang und 2 cm breit. Wie groß ist der Platz in Wirklichkeit?

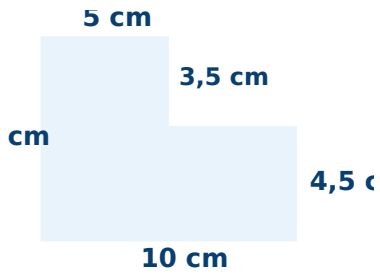
1 cm auf der Karte sind 1000 cm $= 10$ m in Wirklichkeit. Länge $3 \cdot 10 = 30$ m, Breite $2 \cdot 10 = 20$ m. Fläche $30 \cdot 20 = 600\,\mathrm{m}^2$. Achtung: Die Fläche auf der Karte ist $6\,\mathrm{cm}^2$, aber in Wirklichkeit $600\,\mathrm{m}^2$; sie wächst mit dem Quadrat des Maßstabs.

Zusammengesetzte Figuren

So gehst du vor: Figuren zerlegen oder ergänzen

1. Zerlege die Figur in Rechtecke, Parallelogramme und Dreiecke. Alternativ ergänze sie zu einem großen Rechteck.
2. Berechne alle Teilflächen mit den passenden Formeln.
3. Addiere beim Zerlegen, subtrahiere beim Ergänzen.
4. Prüfe die Einheit.

Die L-förmige Figur unten hat die Außenmaße 10 cm mal 8 cm.



Beispiel 9: L-Form zerlegen

Berechne den Flächeninhalt der L-förmigen Figur aus der Zeichnung Das obere Rechteck ist 5 cm breit und $3{,}5$ cm hoch, das untere 10 cm breit und $4{,}5$ cm hoch.

Oben: $5 \cdot 3{,}5 = 17{,}5\,\mathrm{cm}^2$. Unten: $10 \cdot 4{,}5 = 45{,}0\,\mathrm{cm}^2$. Gesamt: $17{,}5 + 45 = 62{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Beispiel 10: Hausgiebel

Die Giebelwand eines Hauses ist 6 m breit. Das Rechteck darunter ist 3 m hoch, das Dreieck darüber 2 m hoch. Wie groß ist die Wand?

Rechteck: $6 \cdot 3 = 18\,\mathrm{m}^2$. Dreieck: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6\,\mathrm{m}^2$. Gesamt: $18 + 6 = 24\,\mathrm{m}^2$.

Beispiel 11: Farbe kaufen

Die Giebelwand ($24\,\mathrm{m}^2$) soll gestrichen werden. Ein Liter Farbe reicht für $6\,\mathrm{m}^2$. Die Wand wird zweimal gestrichen. Wie viel Farbe wird gebraucht?

Zweimal streichen: $2 \cdot 24 = 48\,\mathrm{m}^2$. Farbe: $48 : 6 = 8$ Liter.

Achtung: Typische Fehler

Die Seitenlänge eines Parallelogramms ist nicht die Höhe: Die schräge Seite ist länger als der senkrechte Abstand. Beim Dreieck wird oft der Faktor $\frac{1}{2}$ vergessen. Bei Flächeneinheiten gilt die Umrechnungszahl 100, nicht 10: $1\,\mathrm{m}^2$ sind $100\,\mathrm{dm}^2$, nicht $10\,\mathrm{dm}^2$. Und Länge und Höhe müssen dieselbe Einheit haben, bevor du multiplizierst.

Wusstest du schon?

Die alten Ägypter mussten ihre Felder nach jeder Nilüberschwemmung neu vermessen. Dazu bildeten sie Dreiecke und Rechtecke. Daraus entstand die Geometrie, das Wort bedeutet „Erdmessung“. Ein Fußballfeld misst etwa 7 000 Quadratmeter, also fast ein Hektar.

Einstiegsaktivität: Schneiden und Legen

Zeichne auf Karopapier ein Parallelogramm mit der Grundseite 6 Kästchen und der Höhe 4 Kästchen und schneide es aus. Schneide nun entlang einer Höhe ein rechtwinkliges Dreieck ab und lege es an die andere Seite. Es entsteht ein Rechteck mit 6 mal 4 Kästchen, also 24 Kästchen. Weil beim Umlegen nichts verloren geht und nichts dazukommt, hat das Parallelogramm dieselbe Fläche. Schneide danach ein Parallelogramm entlang einer Diagonale durch: Du erhältst zwei Dreiecke, die genau aufeinanderpassen. Jedes hat also die halbe Fläche. So erklären sich beide Formeln.

Schon gewusst?

Die Ägypter mussten nach jeder Nilüberschwemmung die Felder neu vermessen. Dafür benutzten sie Seile mit Knoten und berechneten Flächen von Rechtecken und Dreiecken. Das Wort „Geometrie“ bedeutet auf Griechisch „Landvermessung“. Auch heute rechnen Vermessungsingenieure krumme Grundstücke aus, indem sie sie in viele Dreiecke zerlegen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Rechteck: $A = a \cdot b$, Quadrat: $A = a^2$. Einheiten: $1\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{dm}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$.
- Parallelogramm: $A = g \cdot h$. Die Höhe steht senkrecht auf der Grundseite und ist nicht die schräge Seite.
- Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Zu jeder Seite gehört eine eigene Höhe, der Flächeninhalt bleibt gleich.
- Die Höhe kann auch außerhalb des Dreiecks liegen (stumpfwinkliges Dreieck); dann verlängerst du die Grundseite.
- Gesuchte Größe: $g = \frac{A}{h}$ beim Parallelogramm, $h = \frac{2A}{g}$ beim Dreieck.
- Zusammengesetzte Figuren zerlegst du in einfache Teile (addieren) oder ergänzt sie zu einem Rechteck (subtrahieren).
- Flächeneinheiten: Umrechnungszahl 100; 1 a $= 100\,\mathrm{m}^2$, 1 ha $= 10\,000\,\mathrm{m}^2$; im

Maßstab wächst die Fläche mit dem Quadrat.

Achtung

Beim Dreieck das Halbieren nicht vergessen: $g \cdot h$ ist die Fläche des Parallelogramms. Nimm die Höhe, nicht die schräge Seite. Beim Umrechnen gilt der Faktor 100, nicht 10. Rechne in einer Einheit und schreibe cm². Bei zusammengesetzten Figuren keine Teilfläche doppelt zählen.

Ottos Tipp

Zeichne bei jedem Dreieck und Parallelogramm die Höhe farbig ein und markiere den rechten Winkel. Dann siehst du sofort, welche Maße du brauchst. Ein Dreieck hat immer genau die halbe Fläche des Parallelogramms mit gleicher Grundseite und Höhe.