Lernzettel - Dreiecke und Winkelsumme

Klasse: Klasse 6

Dreiecke sind die einfachsten Vielecke und in Technik und Natur überall zu finden. Hier lernst du Winkel, Dreiecksarten, die Winkelsumme und die Konstruktion von Dreiecken.

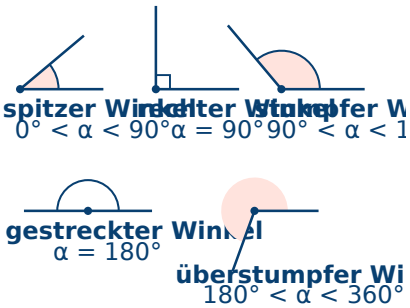
Einstieg: Warum Dächer Dreiecke sind

Schau dir ein Hausdach, einen Kran oder eine Brücke aus Stahl an: Überall tauchen Dreiecke auf. Ein Viereck aus Latten lässt sich zusammenschieben, ein Dreieck nicht. Die Seitenlängen legen die Winkel fest, und umgekehrt. Das macht Dreiecke so stabil, und deshalb bauen Zimmerleute und Ingenieure damit. In diesem Kapitel lernst du, Winkel zu benennen und zu messen, Dreiecke nach ihren Seiten und Winkeln zu ordnen, mit der Winkelsumme von 180° fehlende Winkel zu berechnen und Dreiecke zu konstruieren. Mit diesem Wissen kannst du später auch Vierecke, Vielecke und Körper untersuchen.

Winkel und ihre Arten

Definition: Winkel

Ein Winkel entsteht, wenn zwei Strahlen von einem gemeinsamen Punkt, dem **Scheitelpunkt**, ausgehen. Man misst ihn in **Grad (°)** mit dem Geodreieck.



Regel: Winkelarten

Spitzer Winkel: größer als 0° und kleiner als 90°. **Rechter Winkel:** genau 90°. **Stumpfer Winkel:** größer als 90° und kleiner als 180°. **Gestreckter Winkel:** genau 180°. **Überstumpfer Winkel:** größer als 180° und kleiner als 360°.

Definition: Nebenwinkel und Scheitelwinkel

Zwei Winkel, die zusammen 180° ergeben und eine Seite gemeinsam haben, heißen **Nebenwinkel**. Schneiden sich zwei Geraden, liegen sich **Scheitelwinkel** gegenüber und sind gleich groß.

Beispiel 1: Neben- und Scheitelwinkel

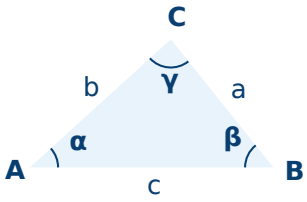
Ein Winkel misst 48°. Wie groß sind Scheitelwinkel und Nebenwinkel?

Der Scheitelwinkel ist ebenfalls 48°, der Nebenwinkel ist $180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$.

Dreiecke und ihre Bezeichnungen

Definition: Dreieck

Ein Dreieck hat drei Ecken A, B, C, drei Seiten a, b, c und drei Innenwinkel α (bei A), β (bei B) und γ (bei C). Die Seite a liegt der Ecke A gegenüber, b der Ecke B und c der Ecke C. Die Ecken benennt man gegen den Uhrzeigersinn.



Dreiecksarten

Definition: Dreiecksarten nach den Seiten

Gleichseitig: alle drei Seiten gleich lang, alle Winkel 60°. **Gleichschenklig:** zwei Seiten (die Schenkel) gleich lang, die Winkel an der dritten Seite (der Basis) sind gleich groß (Basiswinkel). **Ungleichseitig:** alle Seiten verschieden lang.



Definition: Dreiecksarten nach den Winkeln

Spitzwinklig: alle Winkel kleiner als 90°. **Rechtwinklig:** ein Winkel genau 90°. **Stumpfwinklig:** ein Winkel größer als 90°.



Hinweis

Ein Dreieck kann gleichschenklig und rechtwinklig zugleich sein: Die Winkel sind 90°,

45° und 45°.

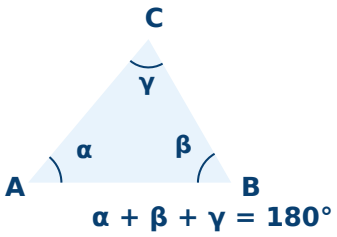
Die Winkelsumme im Dreieck

Satz: Winkelsumme im Dreieck

In jedem Dreieck ist die Summe der drei Innenwinkel **180°**: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Merke: Folgerung

Schneidest du die Ecken eines Papierdreiecks ab und legst die Winkel nebeneinander, bilden sie einen gestreckten Winkel. Ein Dreieck hat höchstens einen rechten oder stumpfen Winkel, denn zwei Winkel von mindestens 90° ergäben schon 180°.



Satz: Außenwinkel

Der **Außenwinkel** eines Dreiecks ist der Nebenwinkel eines Innenwinkels. Er ist so groß wie die Summe der beiden anderen Innenwinkel.

So gehst du vor: Fehlenden Winkel berechnen

1. Addiere die beiden bekannten Winkel.
2. Ziehe die Summe von 180° ab.
3. Prüfe: Alle drei Winkel müssen zusammen 180° ergeben.

Beispiel 2: Dritter Winkel

Gegeben: $\alpha = 48^\circ$, $\beta = 67^\circ$. **Gesucht ist** γ.

$180^\circ - 48^\circ - 67^\circ = 65^\circ$. Alle drei Winkel sind kleiner als 90°, das Dreieck ist spitzwinklig.

Beispiel 3: Gleichschenkliges Dreieck

Der Winkel an der Spitze beträgt 40°. Wie groß sind die Basiswinkel? Und wenn die Basiswinkel je 55° groß sind?

Die Basiswinkel sind gleich: $(180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$. Umgekehrt ist die Spitze $180^\circ - 2 \cdot 55^\circ = 70^\circ$.

Beispiel 4: Außenwinkel

Es ist $\alpha = 50°$ und $\beta = 70°$. Wie groß ist der Außenwinkel bei C?

$\gamma = 60°$, der Außenwinkel ist $180° - 60° = 120° = 50° + 70°$.

Beispiel 5: Mit Zusatzbedingung

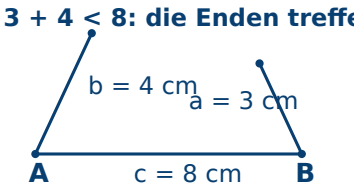
In einem Dreieck ist $\alpha = 70°$, und β ist um 10° größer als γ. Berechne β und γ.

Setze $\gamma = x$, dann ist $\beta = x + 10°$. Es gilt $70° + (x + 10°) + x = 180°$, also $2x = 100°$ und $x = 50°$. Damit ist $\gamma = 50°$ und $\beta = 60°$.

Die Dreiecksungleichung

Satz: Dreiecksungleichung

Aus drei Strecken lässt sich nur dann ein Dreieck bauen, wenn **jede Seite kürzer ist als die Summe der beiden anderen**. Die zwei kürzeren Seiten zusammen müssen länger sein als die längste Seite.



Beispiel 6: Geht ein Dreieck?

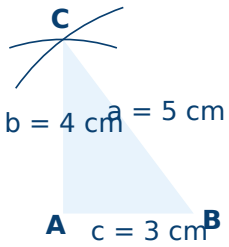
Gibt es Dreiecke mit 3 cm, 4 cm, 8 cm und mit 4 cm, 4 cm, 8 cm?

Nein, denn $3 + 4 = 7$. Auch bei 4 cm, 4 cm und 8 cm geht es nicht: Die Seiten würden flach auf einer Linie liegen.

Konstruktion von Dreiecken

So gehst du vor: Dreieck konstruieren

1. **SSS** (drei Seiten): Zeichne eine Seite, schlage um die Endpunkte Kreisbögen mit den beiden anderen Seitenlängen. Der Schnittpunkt ist die dritte Ecke.
2. **SWS** (zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel): Zeichne eine Seite, trage am Endpunkt den Winkel ab und markiere auf dem freien Schenkel die zweite Seitenlänge.
3. **WSW** (eine Seite und die beiden anliegenden Winkel): Zeichne die Seite, trage an beiden Enden die Winkel ab. Die Schenkel schneiden sich in der dritten Ecke.



Hinweis

Drei Winkel allein reichen nicht, denn es gibt beliebig viele unterschiedlich große, aber ähnlich aussehende Dreiecke mit denselben Winkeln.

Nebenwinkel und Scheitelwinkel

Definition: Nebenwinkel und Scheitelwinkel

Schneiden sich zwei Geraden, entstehen vier Winkel. Zwei Winkel, die nebeneinander liegen und zusammen eine Gerade bilden, heißen **Nebenwinkel**. Zwei Winkel, die sich gegenüberliegen, heißen **Scheitelwinkel**.



Regel: Winkel an Geraden

Nebenwinkel ergänzen sich zu $180°$: $\alpha + \beta = 180°$. Scheitelwinkel sind gleich groß. In der Zeichnung gilt daher: Beide α sind gleich, beide β sind gleich.

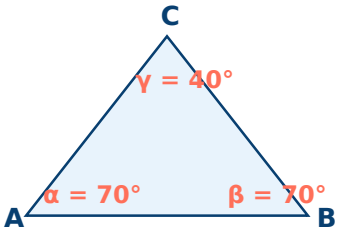
Beispiel 7: Winkel an zwei Geraden

Zwei Geraden schneiden sich. Ein Winkel misst $\alpha = 65°$. Wie groß sind die anderen drei Winkel?

Der Scheitelwinkel von α ist auch $65°$. Der Nebenwinkel ist $\beta = 180° - 65° = 115°$, und sein Scheitelwinkel ist ebenfalls $115°$. Probe: $65° + 115° + 65° + 115° = 360°$.

Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

Im gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang (die **Schenkel**). Die dritte Seite heißt **Basis**. Die Winkel an der Basis, die **Basiswinkel**, sind gleich groß. Der Winkel gegenüber der Basis heißt **Spitzenwinkel**.



Regel: Basiswinkel berechnen

Im gleichschenkligen Dreieck gilt: Basiswinkel $= (180° - \text{Spitzenwinkel}) : 2$. Im gleichseitigen Dreieck sind alle drei Seiten gleich lang und alle drei Winkel gleich groß, nämlich $60°$.

Beispiel 8: Dachgiebel

Ein Dachgiebel hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Spitzenwinkel $100°$. Wie groß ist die Dachneigung, also der Basiswinkel?

Basiswinkel $= (180° - 100°) : 2 = 80° : 2 = 40°$. Probe: $40° + 40° + 100° = 180°$.

Winkel im Verhältnis

Beispiel 9: Verhältnis 1 : 2 : 3

Die Winkel eines Dreiecks verhalten sich wie $1 : 2 : 3$. Berechne sie.

Insgesamt $1 + 2 + 3 = 6$ Teile, $180° : 6 = 30°$ pro Teil. Die Winkel sind $30°$, $60°$ und $90°$. Das Dreieck ist rechtwinklig.

Welche Angaben legen ein Dreieck fest?

Regel: Konstruktionsfälle

Ein Dreieck ist eindeutig bestimmt durch: drei Seiten (SSS), zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel (SWS) oder eine Seite und die beiden anliegenden Winkel (WSW). Die drei Winkel allein (WWW) reichen nicht: Es gibt beliebig viele verschieden große Dreiecke mit den Winkeln $40°$, $60°$, $80°$.

Beispiel 10: Konstruktion mit SWS

Konstruiere ein Dreieck mit $a = 5$ cm, $b = 4$ cm und $\gamma = 60°$.

1. Zeichne die Seite $a = 5$ cm. 2. Trage am Endpunkt C den Winkel $60°$ mit dem Geodreieck an. 3. Miss auf dem freien Schenkel $b = 4$ cm ab. 4. Verbinde den Endpunkt mit dem Anfang von a: Das ist die Seite c.

Achtung: Typische Fehler

Die Dreiecksungleichung gilt mit „größer als“, nicht mit „gleich“: Bei den Seiten 2, 3 und 5 lässt sich kein Dreieck zeichnen, denn $2 + 3 = 5$ ist nicht größer als 5. Die längste Seite liegt immer gegenüber vom größten Winkel. Ein Dreieck kann nur einen rechten oder einen stumpfen Winkel haben, sonst wäre die Winkelsumme schon über $180°$. Und den Winkel immer am richtigen Schenkel ablesen: Beim Geodreieck gibt es zwei Skalen.

Wusstest du schon?

Schon die alten Ägypter spannten ein Seil mit zwölf gleich langen Abschnitten zu einem Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5. Dieses Dreieck hat einen rechten Winkel. So konnten sie Felder nach den Nilüberschwemmungen neu vermessen und Pyramiden mit genauen Ecken bauen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt immer $180°$; damit berechnest du jeden fehlenden Winkel.
- Nebenwinkel ergänzen sich zu $180°$, Scheitelwinkel sind gleich groß.
- Dreiecksarten nach den Seiten: gleichseitig, gleichschenklig, unregelmäßig; nach den Winkeln: spitzwinklig, rechtwinklig, stumpfwinklig.
- Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich: $(180° - \text{Spitzenwinkel}) : 2$. Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel $60°$.
- Dreiecksungleichung: Jede Seite ist kürzer als die Summe der beiden anderen. Nur dann lässt sich ein Dreieck zeichnen.
- Die längste Seite liegt gegenüber vom größten Winkel, die kürzeste gegenüber vom kleinsten.
- Ein Dreieck ist durch SSS, SWS oder WSW eindeutig festgelegt; drei Winkel (WWW) reichen nicht aus.

Achtung

Rechne immer 180° minus die beiden bekannten Winkel. Basiswinkel liegen an den Enden der Basis, nicht an der Spitze. Prüfe die Dreiecksungleichung, bevor du konstruierst. Lege beim Messen den Scheitelpunkt genau auf den Nullpunkt des Geodreiecks. Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°, Scheitelwinkel sind gleich.

Ottos Tipp

Skizziere jede Aufgabe zuerst per Hand und schreibe alle bekannten Größen hinein. Mit einer guten Skizze siehst du sofort, welche Winkel gleich sind und ob die Konstruktion möglich ist. Kontrolliere am Ende: Haben die drei Winkel zusammen 180°?