Lösungen - Dreiecke und Winkelsumme

Klasse: Klasse 6

Lösung zu Aufgabe 1

Wir vergleichen jeden Winkel mit den Grenzen 90° und 180°.
a) 35° ist kleiner als 90°: spitzer Winkel.
b) 90° genau: rechter Winkel, erkennbar am Viertelkreis mit Punkt.
c) 120° liegt zwischen 90° und 180°: stumpfer Winkel.
d) 180° genau: gestreckter Winkel, die Schenkel bilden eine Gerade.
e) 250° ist größer als 180°, aber kleiner als 360°: überstumpfer Winkel.
Tipp: Beim Messen eines überstumpfen Winkels misst man den Rest bis 360°, hier 110°, und rechnet $360^\circ - 110^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 2

In jedem Dreieck gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Den fehlenden Winkel erhält man, indem man die beiden bekannten von 180° abzieht.
a) $\gamma = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.
b) $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. Im rechtwinkligen Dreieck ergeben die beiden anderen Winkel zusammen immer 90°.
c) $\alpha = 180^\circ - 112^\circ - 28^\circ = 40^\circ$.
d) $\beta = 180^\circ - 47^\circ - 83^\circ = 50^\circ$.
Kontrolle zu d): $47 + 50 + 83 = 180$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Art nach den Winkeln richtet sich nach dem größten Winkel. A: größter Winkel 60°, spitzwinklig. B: ein Winkel 90°, rechtwinklig. C: ein Winkel 120°, stumpfwinklig. D: größter Winkel 70°, spitzwinklig.
b) Ein Dreieck mit zwei gleich großen Winkeln hat zwei gleich lange Seiten. Gleichschenklig sind also B (zweimal 45°), C (zweimal 30°) und auch A (alle Winkel gleich). D hat drei verschiedene Winkel und ist daher ungleichseitig.
c) Dreieck A ist gleichseitig, denn alle drei Winkel sind 60°; dann sind auch alle drei Seiten gleich lang.

Lösung zu Aufgabe 4

Nebenwinkel liegen nebeneinander an einer Geraden und ergänzen sich zu 180°. Scheitelwinkel liegen sich gegenüber und sind gleich groß.
a) Nebenwinkel $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Der Scheitelwinkel von α misst 40°, der des Nebenwinkels 140°. Die vier Winkel sind $40^\circ, 140^\circ, 40^\circ, 140^\circ$.
b) Nebenwinkel 45°; die vier Winkel sind $135^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 45^\circ$.
c) Nebenwinkel $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Alle vier Winkel sind rechte Winkel, die Geraden stehen senkrecht aufeinander.

d) $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 5

Im gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Basiswinkel gleich groß. Der dritte Winkel heißt Spitzenwinkel.
a) Für die Basiswinkel bleiben $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$, jeder misst $140^\circ : 2 = 70^\circ$.
b) $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, also je 40°.
c) Beide Basiswinkel zusammen: $2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$. Spitzenwinkel: $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.
d) $180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Das Dreieck ist gleichschenklig und rechtwinklig, wie ein halbes Quadrat.
Kontrolle zu a): $40 + 70 + 70 = 180$.

Lösung zu Aufgabe 6

Dreiecksungleichung: Die Summe zweier Seiten muss immer größer sein als die dritte Seite. Es genügt zu prüfen, ob die zwei kürzeren Seiten zusammen länger sind als die längste.
a) $3 + 4 = 7 > 5$: Das Dreieck existiert. Es ist sogar rechtwinklig.
b) $2 + 3 = 5$, das ist kleiner als 6: Die beiden kurzen Seiten reichen nicht bis zur Spitze. Kein Dreieck.
c) $4 + 4 = 8$, das ist nicht größer als 8: Die drei Punkte liegen auf einer Geraden. Kein echtes Dreieck.
d) $7 + 7 = 14 > 7$: Das Dreieck existiert, es ist gleichseitig.

Lösung zu Aufgabe 7

a) SSS: 1. Zeichne die Strecke cm. 2. Zeichne um A einen Kreisbogen mit Radius $b = 5$ cm. 3. Zeichne um B einen Kreisbogen mit Radius $a = 6$ cm. 4. Der Schnittpunkt der Bögen ist C. 5. Verbinde C mit A und B. Kontrolle: Seiten nachmessen.
b) Zuerst $\gamma = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$. WSW: 1. Zeichne cm. 2. Trage in A den Winkel $\alpha = 50^\circ$ an. 3. Trage in B den Winkel $\beta = 60^\circ$ an. 4. Die freien Schenkel schneiden sich in C. 5. Kontrolle: Der Winkel bei C muss 70° messen.

Lösung zu Aufgabe 8

Der Giebel ist ein gleichschenkliges Dreieck; die Dachneigung ist der Basiswinkel.
a) Spitzenwinkel am First: $180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$.
b) Bei 90° am First bleiben 90° für die beiden Basiswinkel: $90^\circ : 2 = 45^\circ$ Dachneigung.
c) Das zweite Dach ist steiler, weil seine Neigung mit 45° größer ist als 40°. Ein kleinerer Firstwinkel bedeutet ein spitzeres, steileres Dach.
d) Umfang des Giebeldreiecks: zwei Dachschrägen und die Hausbreite: $2 \cdot 4{,}5 + 7 = 16$ m.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Winkelsumme: $180^\circ - 73^\circ - 71^\circ = 36^\circ$.
b) Alle drei Winkel (73°, 71°, 36°) sind kleiner als 90°, also ist das Dreieck spitzwinklig. Da alle Winkel verschieden sind, sind auch alle Seiten verschieden lang: ungleichseitig.
c) Im Dreieck liegt der größten Seite immer der größte Winkel gegenüber. Der größte Winkel ist 73°, also ist das Rohr gegenüber diesem Winkel das längste. Dem kleinsten Winkel (36°) liegt das kürzeste Rohr gegenüber.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Weg A–B–C: $2{,}4 + 3{,}1 = 5{,}5$ km.
b) Nein. A, B und C bilden ein Dreieck. Nach der Dreiecksungleichung ist die direkte Strecke AC kürzer als der Umweg über B, also kürzer als 5,5 km. 6 km ist zu lang.
c) Die direkte Strecke x muss kürzer sein als $2{,}4 + 3{,}1 = 5{,}5$ km und länger als der Unterschied $3{,}1 - 2{,}4 = 0{,}7$ km. Also $0{,}7$ km.
d) Ersparnis: $5{,}5 - 4 = 1{,}5$ km.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Gleichschenklig, Spitzenwinkel 50°: Basiswinkel $(180^\circ - 50^\circ) : 2 = 130^\circ : 2 = 65^\circ$.
b) Umfang: $3{,}2 + 3{,}2 + 2{,}7 = 9{,}1$ m.
c) Band: $9{,}1 \cdot 2{,}50 = 22{,}75$ €.
d) Dreiecksungleichung: Die zwei kürzeren Seiten $2{,}7 + 3{,}2 = 5{,}9$ sind länger als die längste Seite $3{,}2$. Die Seiten passen also zu einem Dreieck.
Antwort: Basiswinkel 65°, Umfang 9,1 m, Band 22,75 €.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Basiswinkel: $(180^\circ - 80^\circ) : 2 = 50^\circ$.
b) Rahmenstange: $2{,}5 + 2{,}5 + 3{,}2 = 8{,}2$ m.
c) Basiswinkel je 60°, Spitzenwinkel $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Alle Winkel sind gleich, also ist der Eingang ein gleichseitiges Dreieck.
d) Maßstab 1 : 50 heißt: 50 cm in Wirklichkeit sind 1 cm auf dem Papier. Schenkel $250 : 50 = 5$ cm, Bodenkante $320 : 50 = 6{,}4$ cm. Man zeichnet die Basis 6,4 cm und schlägt um beide Enden Kreisbögen mit 5 cm Radius.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich: $180^\circ : 3 = 60^\circ$.
b) Umfang: $3 \cdot 70 = 210$ cm $= 2{,}1$ m.
c) Drei Dreiecke brauchen $3 \cdot 2{,}1 = 6{,}3$ m Band. $6{,}3 : 1{,}5 = 4{,}2$. Vier Stücke (6 m) reichen nicht, man muss 5 Stücke kaufen.
d) Mit Lineal und Zirkel: Zeichne eine Strecke von 5 cm. Schlage um beide Endpunkte einen Kreisbogen mit Radius 5 cm. Der Schnittpunkt ist die dritte Ecke. Verbinde ihn mit den Endpunkten; alle Seiten sind 5 cm lang.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Alle 8 Spitzenwinkel liegen um den Mittelpunkt und ergeben zusammen $360°$. Ein Stück: $360° : 8 = 45°$.
b) Die zwei Seiten am Mittelpunkt sind Radien, also gleich lang. Basiswinkel: $(180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$.
c) Bei 6 Stücken: Spitzenwinkel $360° : 6 = 60°$, Basiswinkel $(180° - 60°) : 2 = 60°$.
d) Bei 6 Stücken sind alle drei Winkel $60°$. Ein Dreieck mit drei gleichen Winkeln ist gleichseitig. Bei jeder anderen Stückzahl ist der Spitzenwinkel ungleich $60°$.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $\gamma = 180° - 62° - 48° = 70°$.
b) Alle Winkel sind kleiner als $90°$: spitzwinklig. Da alle Winkel verschieden sind, ist das Dreieck ungleichseitig.
c) Der größten Seite liegt der größte Winkel gegenüber. Der größte Winkel ist $\gamma = 70°$ bei C, also ist die längste Seite. Der kleinste Winkel ist $\beta = 48°$ bei B, also ist die kürzeste Seite.
d) 120 m $= 12\,000$ cm. Im Maßstab 1 : 2000: $12\,000 : 2000 = 6$ cm auf dem Papier.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Der Turm ist die senkrechte Seite, der Schatten liegt waagerecht auf dem Boden, und der Sonnenstrahl verbindet die Turmspitze mit dem Ende des Schattens. Am Fuß des Turms ist ein rechter Winkel.
b) Winkel an der Turmspitze: $180° - 90° - 35° = 55°$.
c) Das Dreieck hat einen rechten Winkel, es ist rechtwinklig.
d) $180° - 90° - 25° = 65°$. Je flacher die Sonnenstrahlen einfallen, desto weiter reicht der Schatten. Der Schatten wird also länger.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Dritter Winkel jeweils $180°$ minus die beiden gegebenen. I: $180 - 120 = 60°$. II: $180 - 110 = 70°$. III: $180 - 125 = 55°$. IV: $180 - 60 = 120°$. V: $180 - 110 = 70°$.
b) I spitzwinklig, II spitzwinklig, III rechtwinklig, IV stumpfwinklig ($120°$), V spitzwinklig.
c) Gleichschenklig sind die Dreiecke mit zwei gleichen Winkeln: I (sogar alle drei gleich), IV ($30°, 30°$) und V ($55°, 55°$).
d) Dreieck I mit drei Winkeln von $60°$ ist gleichseitig. Solche Dreiecke werden im Brückenbau gern verwendet, weil sich die Kräfte gleichmäßig verteilen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Jedes Dreieck bringt $180°$. Viereck: $2 \cdot 180° = 360°$. Fünfeck: $3 \cdot 180° = 540°$. Sechseck: $4 \cdot 180° = 720°$. Zehneck: 8 Dreiecke, $8 \cdot 180° = 1440°$.
b) Von einer Ecke aus kann man zu allen Ecken außer sich selbst und den zwei Nachbarn Diagonalen ziehen. So entstehen $n - 2$ Dreiecke, und die Winkelsumme ist $(n - 2) \cdot 180°$.

c) Im regelmäßigen Sechseck sind alle 6 Winkel gleich: $720^\circ : 6 = 120^\circ$.
d) Fünfter Winkel: $540^\circ - 100^\circ - 120^\circ - 110^\circ - 95^\circ = 115^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Das Verhältnis 2 : 3 : 4 bedeutet: Die Winkelsumme wird in $2 + 3 + 4 = 9$ gleiche Teile geteilt. Ein Teil ist $180^\circ : 9 = 20^\circ$. Die Winkel sind $2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$, $3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ und $4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$.
b) Der größte Winkel ist 80°, also kleiner als 90°: spitzwinklig und ungleichseitig.
c) $1 + 1 + 2 = 4$ Teile, ein Teil ist 45°. Winkel: 45°, 45°, 90°. Das Dreieck ist rechtwinklig und gleichschenklig.
Kontrolle: $40 + 60 + 80 = 180$ und $45 + 45 + 90 = 180$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Falsch. Zwei rechte Winkel ergeben zusammen schon 180°. Für den dritten Winkel bliebe 0°, und dann gäbe es kein Dreieck; die beiden Seiten wären parallel.
b) Falsch. $100^\circ + 50^\circ + 40^\circ = 190^\circ$, das sind 10° zu viel.
c) Richtig. Gleichschenklig heißt: mindestens zwei Seiten sind gleich lang. Beim gleichseitigen Dreieck sind sogar alle drei gleich lang.
d) Richtig. Beispiel: Winkel 120°, 30°, 30°. Die zwei Basiswinkel sind gleich, also ist das Dreieck gleichschenklig, und wegen 120° ist es stumpfwinklig.