Lernzettel - Brüche erweitern und kürzen

Klasse: Klasse 6

Dieselbe Menge lässt sich mit ganz verschiedenen Brüchen aufschreiben. In diesem Kapitel lernst du, Brüche zu erweitern und zu kürzen und sie zu vergleichen.

Einstieg: Die Schokoladentafel

Eine Tafel Schokolade hat 24 Stücke. Lara isst 6 Stücke, ihr Bruder Max isst von einer gleich großen Tafel mit nur 8 Stücken 2 Stücke. Wer hat mehr gegessen? Lara hat $\frac{6}{24}$ gegessen, Max $\frac{2}{8}$. Teilst du Laras Tafel in Viererpakete, sind es $\frac{1}{4}$, bei Max ebenfalls: Beide haben gleich viel gegessen. Dieselbe Menge hat verschiedene Namen. In diesem Kapitel lernst du, Brüche in andere Namen zu verwandeln (erweitern), sie auf den einfachsten Namen zu bringen (kürzen) und mit ihrer Hilfe zu entscheiden, welcher Bruch größer ist. Das brauchst du später bei jeder Rechnung mit Brüchen.

Gleichwertige Brüche

Definition: gleichwertige Brüche

Brüche, die denselben Anteil vom Ganzen beschreiben, heißen **gleichwertig**. Sie stehen am Zahlenstrahl an derselben Stelle. Ein Bruch besteht aus dem **Zähler** (er zählt die Teile) und dem **Nenner** (er nennt die Größe der Teile). Der Bruchstrich bedeutet „geteilt durch“.

Beispiel 1: Pizza

Eine Pizza wird in 2 gleiche Stücke geschnitten, 1 Stück wird gegessen. Eine gleiche Pizza wird in 8 Stücke geschnitten, 4 Stücke werden gegessen. Wer hat mehr gegessen?

Im ersten Fall ist es $\frac{1}{2}$, im zweiten $\frac{4}{8}$. Beide haben gleich viel gegessen, denn $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$.

Erweitern

Definition: Erweitern

Erweitern heißt: Zähler und Nenner mit derselben Zahl (ungleich 0) multiplizieren. Die Teile werden feiner, es gibt mehr davon, der Anteil bleibt gleich.

Merke

Beim Erweitern ändert sich nur die Darstellung, nicht der Wert. Man erweitert, um Brüche gleichnamig zu machen, also auf denselben Nenner zu bringen. Beispiel:

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$.

So gehst du vor: Auf einen Nenner erweitern

1. Frage: Welche Zahl mal dem alten Nenner ergibt den neuen Nenner? Rechne neuer Nenner geteilt durch alten Nenner.
2. Multipliziere Zähler und Nenner mit dieser Zahl.

Beispiel 2: Auf Nenner 35

Erweitere $\frac{2}{5}$ so, dass der Nenner 35 ist.

Es gilt $35 : 5 = 7$. Zähler und Nenner mit 7 multiplizieren: $\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$.

Kürzen

Definition: Kürzen

Kürzen ist die Umkehrung des Erweiterns: Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl (ungleich 0) geteilt. Das geht nur, wenn beide Zahlen durch diese Zahl teilbar sind.

Definition: vollständig gekürzt

Ein Bruch ist **vollständig gekürzt**, wenn Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler außer 1 mehr haben. Am schnellsten kürzt man mit dem **größten gemeinsamen Teiler (ggT)**.

Regel: Teilbarkeit als Hilfe

Durch 2 teilbar: letzte Ziffer gerade. Durch 3 teilbar: Quersumme durch 3 teilbar. Durch 5 teilbar: letzte Ziffer 0 oder 5. Durch 9 teilbar: Quersumme durch 9 teilbar. Durch 10 teilbar: letzte Ziffer 0.

So gehst du vor: Vollständig kürzen

1. Suche einen gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner, am besten den ggT.
2. Teile Zähler und Nenner durch diese Zahl.
3. Prüfe, ob du weiter kürzen kannst, zuerst mit 2, 3 und 5.

Beispiel 3: Mit dem ggT

Kürze $\frac{18}{24}$ mit dem ggT.

Der ggT ist 6: $\frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$.

Beispiel 4: Schrittweise

Kürze $\frac{48}{72}$ vollständig.

Beide Zahlen sind gerade: $\frac{24}{36}$. Wieder gerade: $\frac{12}{18}$. Beide durch 6 teilbar: $\frac{2}{3}$. Zwischen 2 und 3 gibt es keinen gemeinsamen Teiler mehr. Kürzer geht es mit dem ggT 24: $\frac{48:24}{72:24} = \frac{2}{3}$.

Beispiel 5: Anteil als Bruch

In der Klasse 6b sind 28 Kinder, 12 davon fahren mit dem Fahrrad zur Schule. Welcher Anteil ist das?

Der Anteil ist $\frac{12}{28}$. Mit 4 gekürzt: $\frac{3}{7}$.

Brüche vergleichen und ordnen

Regel: Vergleichen

Bei gleichem Nenner entscheidet der Zähler: Je größer der Zähler, desto größer der Bruch. Bei gleichem Zähler entscheidet der Nenner: Je größer der Nenner, desto kleiner die Teile. Bei verschiedenen Nennern erweitert man zuerst auf einen gemeinsamen Nenner, am besten den kleinsten (Hauptnenner).

Beispiel 6: Brüche ordnen

Ordne $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{2}{3}$ der Größe nach, beginne mit dem kleinsten.

Der kleinste gemeinsame Nenner von 4, 6 und 3 ist 12. Erweitern: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. Zähler vergleichen: 8 < 9 < 10. Ergebnis: $\frac{2}{3}$.

Hinweis

Am Zahlenstrahl liegt der größere Bruch weiter rechts. Teilst du den Strahl von 0 bis 1 in 4 Abschnitte, liegt $\frac{1}{2}$ bei der zweiten Markierung, bei 8 Abschnitten liegt $\frac{4}{8}$ ebenfalls dort: verschiedene Namen, ein Punkt.

Brüche am Zahlenstrahl

Am Zahlenstrahl sieht man sofort, dass gleichwertige Brüche an derselben Stelle liegen. Der Strahl unten ist in zwölf gleich lange Abschnitte geteilt. Punkt A liegt bei $\frac{3}{12}$, Punkt B bei $\frac{6}{12}$ und Punkt C bei $\frac{9}{12}$. Gekürzt sind das $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$.



So gehst du vor: Einen Bruch am Zahlenstrahl ablesen

1. Zähle, in wie viele gleich lange Abschnitte die Strecke von 0 bis 1 geteilt ist: Das ist der Nenner.
2. Zähle die Abschnitte von 0 bis zum Punkt: Das ist der Zähler.
3. Kürze den Bruch, wenn es geht.

Beispiel 7: Punkte ablesen

Am Zahlenstrahl oben: Welchen Bruch beschreibt Punkt C, und welcher Bruch mit dem Nenner 8 liegt an derselben Stelle?

Punkt C liegt nach 9 von 12 Abschnitten: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Mit dem Nenner 8 muss $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ gelten, denn $8 : 4 = 2$ und $3 \cdot 2 = 6$.

Gleichwertigkeit prüfen

Regel: Zwei Brüche sind gleichwertig, wenn …

Zwei Brüche sind gleichwertig, wenn sie sich auf denselben vollständig gekürzten Bruch kürzen lassen. Eine zweite Möglichkeit ist die Kreuzprobe: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt.

Beispiel 8: Kreuzprobe

Sind $\frac{12}{20}$ und $\frac{9}{15}$ gleichwertig?

Kreuzprobe: $12 \cdot 15 = 180$ und $20 \cdot 9 = 180$. Beide Produkte sind gleich, also sind die Brüche gleichwertig. Zur Kontrolle: Beide lassen sich auf $\frac{3}{5}$ kürzen.

Der größte gemeinsame Teiler

Definition: ggT

Der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** zweier Zahlen ist die größte Zahl, durch die beide Zahlen teilbar sind. Schreibweise: $\mathrm{ggT}(36; 60) = 12$.

So gehst du vor: ggT mit Teilerlisten

1. Schreibe alle Teiler der kleineren Zahl auf.
2. Streiche die Teiler, die die größere Zahl nicht teilen.

3. Die größte übrig gebliebene Zahl ist der ggT.
4. Kürze den Bruch mit dem ggT, dann ist er sofort vollständig gekürzt.

Beispiel 9: ggT von 36 und 60

Kürze $\frac{36}{60}$ mit dem ggT.

Teiler von 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Davon teilen auch die 60: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Der größte ist 12. Kürzen: $\frac{36:12}{60:12} = \frac{3}{5}$. Kontrolle: $36 = 3 \cdot 12$ und $60 = 5 \cdot 12$.

Brüche mit Tricks vergleichen

Regel: Vergleichen mit Vergleichszahlen

Manchmal geht es ohne Hauptnenner. Vergleiche beide Brüche mit $\frac{1}{2}$ oder mit 1. Ein Bruch ist größer als $\frac{1}{2}$, wenn der Zähler mehr als die Hälfte des Nenners ist. Bei Brüchen nahe 1 vergleichst du, wie viel zum Ganzen fehlt: Je weniger fehlt, desto größer ist der Bruch.

Beispiel 10: Mit der Hälfte

Welcher Bruch ist größer, $\frac{7}{13}$ oder $\frac{5}{12}$?

Die Hälfte von 13 ist 6,5, und 7 ist mehr als 6,5: $\frac{7}{13} > \frac{1}{2}$. Die Hälfte von 12 ist 6, und 5 ist weniger: $\frac{5}{12}$. Also ist $\frac{7}{13} > \frac{5}{12}$.

Beispiel 11: Was fehlt zum Ganzen?

Welcher Bruch ist größer, $\frac{7}{8}$ oder $\frac{8}{9}$?

Bei $\frac{7}{8}$ fehlt $\frac{1}{8}$ zum Ganzen, bei $\frac{8}{9}$ fehlt $\frac{1}{9}$. Weil $\frac{1}{9}$ ist, fehlt bei $\frac{8}{9}$ weniger. Also ist $\frac{8}{9} > \frac{7}{8}$.

Anteile im Alltag

Beispiel 12: Trefferquote

Beim Basketball trifft Lena 18 von 24 Würfen, Paul 21 von 28 Würfen. Wer ist besser?

Lena: $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$. Paul: $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$. Beide haben dieselbe Trefferquote, nämlich $\frac{3}{4}$. Keiner ist besser.

Achtung: Typische Fehler

Beim Erweitern wird mit derselben Zahl multipliziert, nie dieselbe Zahl addiert: $\frac{1}{3}$ ist nicht gleich $\frac{1+2}{3+2} = \frac{3}{5}$. Beim Kürzen darfst du nur Faktoren streichen. Bei $\frac{4+3}{4+8}$ ist das Streichen der Vieren falsch. Vergleichst du Brüche mit gleichem Zähler, ist der Bruch mit dem kleineren Nenner größer, denn die Teile sind größer: $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$.

Wusstest du schon?

Den waagerechten Bruchstrich hat der Mathematiker Fibonacci im Jahr 1202 in Europa bekannt gemacht. Er hatte die Schreibweise von arabischen Gelehrten gelernt. Vorher mussten Brüche in Worten beschrieben werden, etwa „drei von vier Teilen“.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Gleichwertige Brüche beschreiben denselben Anteil und liegen am Zahlenstrahl an derselben Stelle.
- Erweitern: Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren. Der Wert bleibt gleich.
- Kürzen: Zähler und Nenner durch denselben gemeinsamen Teiler dividieren. Mit dem ggT kürzt du in einem Schritt vollständig.
- Mit der Kreuzprobe prüfst du Gleichwertigkeit: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$.
- Brüche mit verschiedenen Nennern vergleichst du über den Hauptnenner oder mit Vergleichszahlen wie $\frac{1}{2}$ und 1.
- Bei gleichem Zähler ist der Bruch mit dem kleineren Nenner größer; bei gleichem Nenner der mit dem größeren Zähler.
- Nie addieren oder subtrahieren beim Erweitern und Kürzen, und Anteile im Alltag immer vollständig kürzen.

Achtung

Verändere nie nur den Zähler oder nur den Nenner. Erweitern bedeutet immer mal, Kürzen immer geteilt durch, nie plus oder minus. Aus $\frac{3}{5}$ wird durch „plus 2“ nicht $\frac{5}{7}$. Gekürzt werden nur Faktoren, nicht Summanden: In $\frac{2+6}{2+10}$ darfst du die beiden 2 nicht streichen. Hör nicht zu früh auf: $\frac{6}{8}$ ist noch nicht vollständig gekürzt, es ist $\frac{3}{4}$.

Ottos Tipp

Kürzen ist wie Auspacken, Erweitern wie Einpacken. Frage dich am Ende jeder Aufgabe: Kann ich noch kürzen? Ist der Zähler mehr als halb so groß wie der Nenner, ist der Bruch größer als $\frac{1}{2}$.