Lösungen - Brüche erweitern und kürzen

Klasse: Klasse 6

Lösung zu Aufgabe 1

Erweitern heißt: Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren. Der Wert des Bruchs bleibt gleich, nur die Teile werden feiner.

a) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.

b) $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$.

c) $\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 6} = \frac{42}{60}$.

d) $\frac{3}{11} = \frac{3 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{27}{99}$.

Vorstellung zu a): Teilt man jedes Drittel einer Pizza in 4 Stücke, werden aus 2 Dritteln 8 Zwölftel. Die Menge Pizza bleibt gleich.

Lösung zu Aufgabe 2

Kürzen heißt: Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl teilen. Am schnellsten geht es mit dem größten gemeinsamen Teiler (ggT).

a) 12 und 18 sind beide durch 6 teilbar: $\frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$.

b) 45 und 60 sind durch 5 und durch 3 teilbar, also durch 15: $\frac{45:15}{60:15} = \frac{3}{4}$.

c) 56 und 72 sind durch 8 teilbar: $\frac{56:8}{72:8} = \frac{7}{9}$.

d) Quersummen 9 und 9: beide durch 9 teilbar, sogar durch 27: $\frac{81:27}{108:27} = \frac{3}{4}$.

Kontrolle: In allen Ergebnissen haben Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler mehr außer 1.

Lösung zu Aufgabe 3

Wir suchen zuerst die Erweiterungs- oder Kürzungszahl und wenden sie dann auf die andere Zahl an.

a) Von 5 auf 20 wurde mit 4 erweitert. Zähler: $3 \cdot 4 = 12$. Also $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$.

b) Von 7 auf 28 wurde mit 4 erweitert. Nenner: $9 \cdot 4 = 36$. Also $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$.

c) Von 36 auf 3 wurde durch 12 gekürzt. Zähler: $24 : 12 = 2$. Also $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

d) Von 14 auf 42 wurde mit 3 erweitert. Der gesuchte Zähler ist $15 : 3 = 5$. Also $\frac{5}{14} = \frac{15}{42}$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Das Stück von 0 bis 1 ist in 12 gleiche Teile geteilt. A liegt beim 3. Strich: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. B liegt beim 6. Strich: $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. C liegt beim 9. Strich: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

b) Erweitern mit 2 auf Vierundzwanzigstel: A $\frac{6}{24}$, B $\frac{12}{24}$, C $\frac{18}{24}$.

c) Die Mitte zwischen $\frac{3}{12}$ und $\frac{9}{12}$ liegt bei $\frac{6}{12}$, denn 6 liegt genau in der Mitte zwischen 3 und 9. Das ist Punkt B, also $\frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Teilerlisten: 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18; 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. ggT 6, also $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.
42 und 70: gemeinsame Teiler 1, 2, 7, 14; ggT 14, also $\frac{42}{70} = \frac{3}{5}$.
48 und 64: gemeinsame Teiler 1, 2, 4, 8, 16; ggT 16, also $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$.
35 und 49: gemeinsame Teiler 1, 7; ggT 7, also $\frac{35}{49} = \frac{5}{7}$.
b) Nach dem Kürzen haben $\frac{18}{30}$ und $\frac{42}{70}$ den Nenner 5. Beide sind gleich $\frac{3}{5}$, also gleichwertig.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Da $\frac{6}{8} > \frac{5}{8}$, gilt $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$.
b) $\frac{8}{12}$ mit 4 gekürzt ergibt $\frac{2}{3}$. Es gilt also $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.
c) Hauptnenner 63: $\frac{5}{9} = \frac{35}{63}$ und $\frac{4}{7} = \frac{36}{63}$. Also $\frac{5}{9}$, wenn auch nur knapp.
d) Hauptnenner 40: $\frac{7}{20} = \frac{14}{40}$ und $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$. Also $\frac{7}{20}$.
Merke: Gleichnamige Brüche vergleicht man an den Zählern.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Der Hauptnenner von 4, 6, 3 und 12 ist 12. Erweitert: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $\frac{7}{12}$. Nach den Zählern geordnet: $\frac{7}{12}$.
b) Der Hauptnenner von 5, 2, 10 und 20 ist 20. Erweitert: $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, $\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$, $\frac{7}{10} = \frac{14}{20}$, $\frac{11}{20}$. Geordnet: $\frac{1}{2}$.
Kontrolle: Der kleinste Bruch in b) ist $\frac{1}{2}$; alle anderen sind größer als die Hälfte.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Die Tafel hat 24 Stücke. Lena isst eine Reihe, das sind 6 Stücke: $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Tom: $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. Mara: $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.
b) Mit dem gemeinsamen Nenner 24 vergleicht man die Zähler: 9 > 8 > 6. Mara isst am meisten.
c) Gegessen wurden $6 + 8 + 9 = 23$ Stücke. Für die Pause bleibt 1 Stück, also $\frac{1}{24}$ der Tafel.
d) Mia isst $\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$, Lena $\frac{6}{24}$. Da $10 > 6$, hat Mia einen größeren Anteil, obwohl sie weniger Stücke gegessen hat als Lena.

Lösung zu Aufgabe 9

a) 6a: $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. 6b: $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$. 6c: $\frac{14}{28} = \frac{1}{2}$.
b) Wir vergleichen $\frac{3}{5}$ mit $\frac{1}{2}$: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ und $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$. Die größte Mehrheit gab es in der 6b.
c) Nein. In der 6a und der 6c hat die Siegerin genau die Hälfte der Stimmen, also nicht mehr als die Hälfte. Nur in der 6b hat sie eine echte Mehrheit.
d) Die Hälfte von 25 Stimmen ist 12,5. Die Siegerin hat 15 Stimmen, also $15 - 12{,}5 = 2{,}5$ Stimmen mehr als die Hälfte.

Lösung zu Aufgabe 10

a) 6a: $\frac{12}{20}$, gekürzt mit 4: $\frac{3}{5}$. 6b: $\frac{18}{30}$, gekürzt mit 6: $\frac{3}{5}$. 6c: $\frac{21}{35}$, gekürzt mit 7: $\frac{3}{5}$. 6d: $\frac{16}{24}$, gekürzt mit 8: $\frac{2}{3}$.
b) 6a, 6b und 6c haben dieselbe Trefferquote $\frac{3}{5}$, obwohl sie verschieden viele Würfe hatten.
c) Vergleich mit Hauptnenner 15: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$. Die 6d ist am besten.
d) Bei 30 Versuchen: $\frac{2}{3}$ von 30 sind $30 : 3 \cdot 2 = 20$ Treffer.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Jonas $\frac{4}{5}$ (nicht kürzbar), Emre $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, Felix $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, Noah $\frac{7}{10}$ (nicht kürzbar).
b) Hauptnenner 20: Jonas $\frac{16}{20}$, Emre $\frac{15}{20}$. Jonas hat die bessere Quote.
c) In Zwanzigsteln: Jonas 16, Emre 15, Felix 15, Noah 14. Am besten ist Jonas, am schlechtesten Noah; Emre und Felix sind gleich gut.
d) Die Quote $\frac{4}{5}$ bei 20 Versuchen bedeutet $\frac{16}{20}$. Noah bräuchte 16 Tore.
Antwort: Jonas trifft am sichersten, Noah müsste bei 20 Versuchen 16 Tore schießen.

Lösung zu Aufgabe 12

a) 1 m = 100 cm. Anna: $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ m. Ben: $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ m. Carlo: $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ m.
b) Annas und Carlos Streifen: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$ m, denn $25 + 75 = 100$ cm.
c) $\frac{3}{5}$ m $= \frac{60}{100}$ m $= 60$ cm. Dieser Streifen ist länger als Bens (40 cm), aber kürzer als Carlos (75 cm).
Antwort: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$ m; Anna und Carlo ergeben zusammen einen Meter; der neue Streifen ist 60 cm lang.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Äpfel: $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Birnen: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Orangen: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
b) Bananen: $36 - 9 - 12 - 6 = 9$. Anteil $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
c) Die Hälfte der 12 Birnen wird gegessen, es bleiben 6 Birnen. Insgesamt sind noch $36 - 6 = 30$ Früchte da. Anteil der Birnen: $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.
d) Erweitert auf Zwölftel: Äpfel $\frac{3}{12}$, Birnen $\frac{4}{12}$, Orangen $\frac{2}{12}$, Bananen $\frac{3}{12}$. Die Birnen haben den größten Zähler, sie sind am häufigsten.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Milch: $\frac{6}{8}$ gekürzt mit 2 ist $\frac{3}{4}$ l. Mehl: $\frac{9}{12}$ gekürzt mit 3 ist $\frac{3}{4}$ kg. Zucker: $\frac{3}{6}$ gekürzt mit 3 ist $\frac{1}{2}$ kg.
b) Doppelte Menge: Milch $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ l, Mehl $1\frac{1}{2}$ kg, Zucker $\frac{2}{2} = 1$ kg.
c) Halbe Menge: Bei einem Bruch halbiert man, indem man den Nenner verdoppelt. Milch $\frac{3}{8}$ l, Mehl $\frac{3}{8}$ kg, Zucker $\frac{1}{4}$ kg. Ein Kilogramm sind 1000 g, also sind $\frac{1}{4}$ kg genau 250 g.

Antwort: $\frac{3}{4}$ l, $\frac{3}{4}$ kg, $\frac{1}{2}$ kg; doppelt $1\frac{1}{2}$ l, $1\frac{1}{2}$ kg, 1 kg; halb $\frac{3}{8}$ l, $\frac{3}{8}$ kg, 250 g.

Lösung zu Aufgabe 15

a) 6a (30 Kinder): Fußball $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$, Schwimmen $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$, Basketball $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, Radfahren $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$.
6b (24 Kinder): Fußball $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, Schwimmen $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$, Basketball $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$, Radfahren $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.
b) Bei keiner Sportart sind die Anteile gleich, zum Beispiel $\frac{1}{5} \neq \frac{1}{6}$ beim Basketball.
c) Fußball: $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ in der 6a, $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ in der 6b. In der 6a ist Fußball beliebter.
d) $9 + 8 = 17$ von 54 Kindern: $\frac{17}{54}$. Der Bruch lässt sich nicht kürzen, weil 17 eine Primzahl ist und 54 nicht teilt.

Lösung zu Aufgabe 16

a) 6a: $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$. 6b: $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$. 6c: $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. 6d: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.
b) Die Klassen 6a, 6b und 6d sind gleich gut; alle haben den Anteil $\frac{3}{4}$.
c) Hauptnenner 20: 6c $\frac{16}{20}$, die anderen $\frac{15}{20}$. Reihenfolge: 6c vor 6a, 6b und 6d (gleichauf).
d) Die beste Quote ist $\frac{4}{5}$. Bei 30 Kindern: $30 : 5 \cdot 4 = 24$ Kinder müssen bestehen.
Antwort: Die 6c ist am erfolgreichsten; eine Klasse mit 30 Kindern bräuchte 24 bestandene Tests.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Hauptnenner 40: $\frac{3}{4} = \frac{30}{40}$, $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$, $\frac{7}{10} = \frac{28}{40}$, $\frac{13}{20} = \frac{26}{40}$. Geordnet: $\frac{5}{8}$.
b) 1 l = 1000 ml: $\frac{3}{4}$ l $= 750$ ml, $\frac{5}{8}$ l $= 625$ ml, $\frac{7}{10}$ l $= 700$ ml, $\frac{13}{20}$ l $= 650$ ml.
c) Bis 1 Liter fehlen: $\frac{1}{4}$ l (250 ml), $\frac{3}{8}$ l (375 ml), $\frac{3}{10}$ l (300 ml), $\frac{7}{20}$ l (350 ml).
d) Kein Paar passt. Jeder Zylinder ist mehr als halb voll; zwei mehr als halbe Liter ergeben zusammen mehr als 1 Liter. Selbst die zwei kleinsten Mengen ergeben $625 + 650 = 1275$ ml.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Das Ganze ist 12 cm lang. $\frac{1}{2}$ sind $12 : 2 = 6$ cm, $\frac{1}{3}$ sind 4 cm, $\frac{1}{4}$ sind 3 cm, $\frac{1}{6}$ sind 2 cm, $\frac{1}{12}$ ist 1 cm.
b) Ein halber Streifen ist 6 cm lang. Mit Sechsteln (je 2 cm) braucht man 3 Stück: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Mit Zwölfteln (je 1 cm) braucht man 6 Stück: $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$.
c) Mit Streifen: Ein Drittel (4 cm) und ein Sechstel (2 cm) sind zusammen 6 cm, genau so lang wie ein halber Streifen. Durch Erweitern: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, also $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Wir erweitern beide Brüche, bis Platz dazwischen ist. Auf Vierundzwanzigstel:

$\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$ und $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$. Dazwischen liegen $\frac{13}{24}$, $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ und $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.
b) Hauptnenner 42 ergibt $\frac{35}{42}$ und $\frac{36}{42}$, da ist kein Platz. Mit 84: $\frac{70}{84}$ und $\frac{72}{84}$. Dazwischen liegt $\frac{71}{84}$.
c) Man kann zwei Brüche immer weiter erweitern, zum Beispiel mit 2, 4, 8, 16 ... Dabei wird die Lücke zwischen den Zählern immer größer, und es passen immer mehr Brüche hinein. Deshalb gibt es unendlich viele Brüche dazwischen.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Alle Brüche gleich $\frac{3}{4}$ haben die Form $\frac{3k}{4k}$. Zähler plus Nenner ergibt $7k = 35$, also $k = 5$. Der Bruch heißt $\frac{15}{20}$. Probe: $15 + 20 = 35$ und $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.
b) Form $\frac{5k}{8k}$. Der Unterschied ist $8k - 5k = 3k = 24$, also $k = 8$. Der Bruch heißt $\frac{40}{64}$. Probe: $64 - 40 = 24$.
c) Der Bruch wurde mit seinem ggT 11 auf $\frac{2}{7}$ gekürzt. Rückwärts erweitern wir mit 11: $\frac{22}{77}$. Probe: Der ggT von 22 und 77 ist 11.