Lernzettel - Addition und Subtraktion von Brüchen

Klasse: Klasse 6

Brüche addieren und subtrahieren heißt, gleich große Teile zusammenzufassen oder wegzunehmen. Du lernst gleichnamige und ungleichnamige Brüche und gemischte Zahlen.

Einstieg: Der Geburtstagskuchen

Nach Jonas' Geburtstag ist vom Blechkuchen noch ein Teil übrig. Mia isst $\frac{1}{4}$ des ganzen Kuchens, Ben isst $\frac{1}{3}$. Wie viel vom Kuchen haben die beiden zusammen gegessen? Die Teile sind verschieden groß, deshalb kannst du die Zähler nicht einfach addieren. Du brauchst eine gemeinsame Einteilung: Teilst du den Kuchen in 12 gleich große Stücke, isst Mia 3 Stücke und Ben 4 Stücke, zusammen sind das $\frac{7}{12}$. Genau diese Idee, die gemeinsame Einteilung, steckt hinter dem Hauptnenner. In diesem Kapitel lernst du, Brüche sicher zu addieren und zu subtrahieren, bei einfachen und bei schwierigen Nennern, mit gemischten Zahlen und in Sachaufgaben.

Gleichnamige Brüche

Definition: gleichnamig

Brüche mit demselben Nenner heißen **gleichnamig**. Der Nenner sagt, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt ist.

Regel: Gleichnamige Brüche

Man addiert oder subtrahiert die Zähler. Der Nenner bleibt unverändert: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ und $\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Am Ende kürzt man, wenn möglich.

Hinweis

Der Nenner wird **nicht** addiert. Zwei Siebtel und drei Siebtel sind fünf Siebtel, so wie 2 Äpfel und 3 Äpfel 5 Äpfel sind.

Ungleichnamige Brüche

Definition: Hauptnenner

Haben die Brüche verschiedene Nenner, bringt man sie durch Erweitern auf einen **gemeinsamen Nenner**. Am bequemsten ist der **Hauptnenner**, das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner.

So gehst du vor: Ungleichnamige Brüche addieren

1. Hauptnenner bestimmen: Schreibe die Vielfachen des größeren Nenners auf und prüfe, ob der andere Nenner sie teilt.
2. Beide Brüche auf den Hauptnenner erweitern.
3. Zähler addieren oder subtrahieren, Nenner behalten.
4. Ergebnis kürzen und gegebenenfalls als gemischte Zahl schreiben.

Beispiel 1: Hauptnenner finden

Finde den Hauptnenner von 6 und 8, von 3 und 5 sowie von 4 und 12.

Vielfache von 8: 8, 16, 24. 8 und 16 sind nicht durch 6 teilbar, 24 schon: Hauptnenner 24. Sind die Nenner teilerfremd, wie 3 und 5, ist der Hauptnenner das Produkt: 15. Bei 4 und 12 ist 12 schon der Hauptnenner.

Beispiel 2: Addieren

Berechne $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$.

Hauptnenner von 4 und 6 ist 12. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Dann $\frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$. Das Ergebnis lässt sich nicht kürzen.

Beispiel 3: Subtrahieren

Berechne $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$.

Hauptnenner 12: $\frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$.

Beispiel 4: Drei Brüche

Berechne $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$.

Hauptnenner 12: $\frac{6}{12} + \frac{8}{12} - \frac{3}{12}$. Von links nach rechts: 6 + 8 = 14, dann 14 − 3 = 11. Ergebnis: $\frac{11}{12}$.

Hinweis

Du darfst auch irgendeinen gemeinsamen Nenner nehmen, etwa das Produkt der Nenner. Dann musst du am Ende nur stärker kürzen. Mit dem Hauptnenner bleiben die Zahlen kleiner.

Gemischte Zahlen

Definition: gemischte Zahl

Eine **gemischte Zahl** besteht aus einer ganzen Zahl und einem Bruch, zum Beispiel $2\frac{3}{4}$. Ein unechter Bruch hat einen Zähler, der größer als der Nenner ist.

Merke: Umwandeln

$\frac{11}{4} = 11 : 4 = 2$ Rest 3, also $2\frac{3}{4}$. Umgekehrt: $2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$.

So gehst du vor: Gemischte Zahlen addieren und subtrahieren

1. Rechne ganze Zahlen mit ganzen Zahlen und Brüche mit Brüchen.
2. Bringe die Brüche auf den Hauptnenner.
3. Ist beim Subtrahieren der erste Bruch kleiner, zerlege ein Ganzes in Teile (Entbündeln).
4. Kürze das Ergebnis.

Beispiel 5: Entbündeln

Berechne $3\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}$.

Hauptnenner 6: $3\frac{3}{6} - 1\frac{4}{6}$. Da $\frac{3}{6}$ kleiner als $\frac{4}{6}$ ist, zerlegt man ein Ganzes: $3\frac{3}{6} = 2\frac{9}{6}$. Jetzt $2\frac{9}{6} - 1\frac{4}{6} = 1\frac{5}{6}$.

Beispiel 6: Ganze Zahl minus Bruch

Berechne $2 - \frac{3}{5}$.

$2 = \frac{10}{5}$, also $\frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$. Oder mit Entbündeln: $2 = 1\frac{5}{5}$ und $1\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = 1\frac{2}{5}$.

Sachaufgaben

Beispiel 7: Torte

Eine Familie isst von einer Torte zum Mittag $\frac{1}{3}$ und am Nachmittag $\frac{1}{4}$. Wie viel ist noch übrig?

Gegessen: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$. Übrig: $1 - \frac{7}{12} = \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

Hinweis

Für ein Ganzes gilt immer $1 = \frac{n}{n}$. Das hilft bei „Wie viel bleibt übrig?“. Im Rechteckmodell färbst du bei 12 Spalten für $\frac{1}{3}$ vier Spalten und für $\frac{1}{4}$ weitere drei: Zusammen sind es $\frac{7}{12}$.

Den Hauptnenner finden

Definition: Hauptnenner

Der **Hauptnenner** zweier oder mehrerer Brüche ist der kleinste gemeinsame Nenner. Er ist das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** der Nenner. Auf diesen Nenner erweiterst du alle Brüche, bevor du addierst oder subtrahierst.

So gehst du vor: Hauptnenner bestimmen

1. Schreibe die Vielfachen des größeren Nenners der Reihe nach auf.
2. Prüfe bei jedem Vielfachen, ob es auch ein Vielfaches des anderen Nenners ist.
3. Das erste Vielfache, das passt, ist der Hauptnenner.
4. Erweitere beide Brüche auf diesen Nenner und rechne mit den Zählern.

Beispiel 8: Hauptnenner von 12 und 18

Berechne $\frac{5}{12} + \frac{7}{18}$.

Vielfache von 18: 18, 36, ... Schon 36 ist durch 12 teilbar ($36 : 12 = 3$), also ist 36 der Hauptnenner. Erweitern: $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$ und $\frac{7}{18} = \frac{14}{36}$. Addieren: $\frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{29}{36}$. Dieser Bruch ist vollständig gekürzt, denn 29 ist eine Primzahl.

Ein Trick: Haben beide Nenner keinen gemeinsamen Teiler (zum Beispiel 4 und 9), ist der Hauptnenner einfach das Produkt, hier 36. Ist ein Nenner ein Vielfaches des anderen (zum Beispiel 3 und 12), ist der größere Nenner schon der Hauptnenner.

Brüche am Streifen darstellen

Mit einem Streifenmodell siehst du, warum die gemeinsame Einteilung funktioniert. Der Streifen unten ist in 12 gleich große Teile geteilt. Die gelben Teile zeigen $\frac{1}{3}$, die roten Teile $\frac{1}{4}$.



Zusammen sind vier gelbe und drei rote Teile gefärbt, also $\frac{7}{12}$ des Streifens. Zeichne dir bei neuen Aufgaben ruhig einen Streifen oder einen Kreis, das hilft besonders beim Subtrahieren.

Mehrere Brüche und Klammern

Regel: Reihenfolge beim Rechnen

Klammern werden zuerst berechnet. Ohne Klammern rechnest du von links nach rechts. Bei mehr als zwei Brüchen suchst du einen gemeinsamen Hauptnenner für alle

Nenner auf einmal oder rechnest Schritt für Schritt.

Beispiel 9: Mit Klammer

Berechne $\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$.

Zuerst die Klammer: Hauptnenner 6, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, also $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Dann: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$, Hauptnenner 12: $\frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$.

Beispiel 10: Drei Brüche

Berechne $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Der Hauptnenner von 2, 3 und 4 ist 12. Erweitern: $\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$. Als gemischte Zahl: $\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$.

Rechenvorteile nutzen

Regel: Vertauschen und Zusammenfassen

Beim Addieren darfst du Summanden vertauschen (Kommutativgesetz) und beliebig zusammenfassen (Assoziativgesetz). Suche Brüche mit gleichem Nenner und fasse sie zuerst zusammen. Das spart Erweitern und verkleinert die Zahlen.

Beispiel 11: Geschickt rechnen

Berechne $\frac{3}{7} + \frac{2}{5} + \frac{4}{7}$ möglichst geschickt.

Vertausche: $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{5}$. Die ersten beiden haben denselben Nenner: $\frac{7}{7} = 1$. Dann bleibt $1 + \frac{2}{5} = 1\frac{2}{5}$.

Subtrahieren mit gemischten Zahlen: Entbündeln

So gehst du vor: Gemischte Zahlen subtrahieren

1. Bringe die Bruchteile auf denselben Nenner.
2. Ist der Bruch des Minuenden kleiner als der Bruch des Subtrahenden, entbündle: Nimm 1 vom ganzen Teil weg und schreibe es als Bruch mit dem Nenner dazu.
3. Subtrahiere zuerst die ganzen Zahlen, dann die Brüche.
4. Kürze das Ergebnis.

Beispiel 12: Mit Entbündeln

Berechne $4\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6}$.

Gleicher Nenner: $4\frac{2}{6} - 1\frac{5}{6}$. Weil $\frac{2}{6}$ ist, entbündeln wir: $4\frac{2}{6} = 3\frac{8}{6}$. Jetzt: $3\frac{8}{6} - 1\frac{5}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}$. Probe mit unechten Brüchen: $\frac{13}{3} - \frac{11}{6} = \frac{26}{6} - \frac{11}{6} = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$. Stimmt.

Sachaufgaben mit Bruchteilen

Beispiel 13: Der Vorrat

Im Tank der Schulheizung waren am Montag $\frac{7}{8}$ Öl. Bis Freitag wurden $\frac{1}{4}$ des vollen Tanks verbraucht, am Wochenende noch $\frac{1}{8}$. Wie viel ist am Montag danach noch im Tank?

Verbrauch insgesamt: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Rest: $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Der Tank ist noch halb voll.

Achtung: Typische Fehler

Addiere nie Zähler und Nenner getrennt: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ist nicht $\frac{2}{5}$, sondern $\frac{5}{6}$. Vergiss nach dem Erweitern nicht, dass nur der Zähler addiert wird. Beim Entbündeln gehört zu dem weggenommenen Ganzen genau so viele Teile, wie der Nenner angibt, bei Sechsteln also $\frac{6}{6}$. Und schließlich: Das Ergebnis immer prüfen, ob es sich noch kürzen oder als gemischte Zahl schreiben lässt.

Wusstest du schon?

Die alten Ägypter kannten fast nur Stammbrüche, also Brüche mit dem Zähler 1. Für $\frac{5}{6}$ schrieben sie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Ihre Bruchrechnung stand schon vor rund 3 600 Jahren im Papyrus Rhind, dem ältesten bekannten Mathebuch.

Einstiegsaktivität: Papierstreifen falten

Nimm zwei gleich lange Papierstreifen. Falte den ersten in Hälften und färbe eine Hälfte rot. Falte den zweiten in Drittel und färbe ein Drittel blau. Lege die gefärbten Stücke hintereinander. Wie lang sind sie zusammen? Mit den Faltlinien allein kannst du das nicht ablesen, denn Hälften und Drittel passen nicht aufeinander. Faltest du aber beide Streifen in Sechstel, dann siehst du: Die rote Hälfte besteht aus drei Sechsteln, das blaue Drittel aus zwei Sechsteln. Zusammen sind es fünf Sechstel. Genau das macht der Hauptnenner: Er sorgt dafür, dass alle Teile gleich groß sind, bevor man sie zählt.

Schon gewusst?

Die Schreibweise mit dem waagerechten Bruchstrich stammt aus arabischen Rechenbüchern und wurde um 1200 von Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, in Europa bekannt gemacht. In Musiknoten begegnen dir Brüche jeden Tag: Eine halbe

Note und zwei Viertelnoten füllen zusammen einen Viertakt, denn ein Halbes plus zwei Viertel ergibt ein Ganzes.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Gleichnamige Brüche addierst oder subtrahierst du, indem du nur die Zähler rechnest. Der Nenner bleibt gleich.
- Ungleichnamige Brüche machst du zuerst gleichnamig: Erweitere auf den Hauptnenner, das ist das kgV der Nenner.
- Zähler und Nenner dürfen nie getrennt addiert werden: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ist $\frac{5}{6}$, nicht $\frac{2}{5}$.
- Gemischte Zahlen: Rechne ganze Zahlen und Brüche getrennt oder wandle in unechte Brüche um.
- Beim Subtrahieren gemischter Zahlen musst du manchmal entbündeln: $3\frac{1}{4} = 2\frac{5}{4}$.
- Mit dem Kommutativ- und Assoziativgesetz fasst du Brüche mit gleichem Nenner zuerst zusammen und rechnest geschickt.
- Nach jeder Rechnung: kürzen, als gemischte Zahl schreiben und durch einen Überschlag oder Streifen prüfen.

Achtung

Addiere nie die Nenner: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \neq \frac{2}{7}$, richtig ist $\frac{7}{12}$. Erweitere beide Brüche, nicht nur einen. Kürze das Ergebnis: $\frac{6}{12}$ wird $\frac{1}{2}$. Beim Subtrahieren darfst du die Reihenfolge nicht vertauschen.

Ottos Tipp

Falte zwei gleiche Papierstreifen in Viertel und färbe 1 und 2 Viertel. Zusammen sind es 3 Viertel, und du siehst, warum der Nenner bleibt. Fehlt dir der gemeinsame Nenner, probiere die Vielfachen des größeren Nenners!