Lösungen - Addition und Subtraktion von Brüchen

Klasse: Klasse 6

Lösung zu Aufgabe 1

Die Brüche sind gleichnamig, also bleibt der Nenner stehen und wir rechnen nur mit den Zählern.
a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$. Kürzen ist nicht möglich.
b) $\frac{9}{10}-\frac{4}{10}=\frac{5}{10}$. Zähler und Nenner sind durch 5 teilbar: $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.
c) $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}=\frac{12}{12}=1$. Zwölf Zwölftel ergeben genau ein Ganzes.
d) Wir subtrahieren nacheinander: $\frac{11-2-4}{15}=\frac{5}{15}$. Kürzen mit 5 ergibt $\frac{1}{3}$.
Antwort: $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{2}$, 1 und $\frac{1}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 2

Ein Ganzes schreiben wir immer mit dem Nenner, der schon da ist, zum Beispiel $1=\frac{5}{5}$.
a) $\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$. Probe: $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$.
b) $\frac{9}{9}-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}$. Es fehlen zwei Neuntel.
c) $1-\frac{5}{12}=\frac{12}{12}-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$.
d) Lackiert sind $\frac{3}{8}$. Das ganze Brett ist $\frac{8}{8}$. Nicht lackiert ist $\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$.
Antwort: Es fehlen $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{12}$, und $\frac{5}{8}$ des Brettes sind noch nicht lackiert.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner. Wir suchen in den Vielfachen des größeren Nenners die erste Zahl, die auch durch den kleineren teilbar ist.
1) 2 und 3: Hauptnenner 6; $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$.
2) 4 und 6: 6 und 12 sind Vielfache von 6, aber erst 12 ist durch 4 teilbar; $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$.
3) 8 und 12: Hauptnenner 24; $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$, $\frac{1}{12}=\frac{2}{24}$.
4) 15 und 10: Hauptnenner 30; $\frac{7}{15}=\frac{14}{30}$, $\frac{3}{10}=\frac{9}{30}$.
b) In den Zeilen 2, 3 und 4 ist der Hauptnenner kleiner als das Produkt der Nenner (12, 24, 30), weil die Nenner einen gemeinsamen Teiler haben. Nur in Zeile 1 sind die Nenner teilerfremd, dort ist $6=2\cdot 3$.

Lösung zu Aufgabe 4

Vorgehen: Hauptnenner bestimmen, beide Brüche erweitern, Zähler addieren, kürzen.
a) Hauptnenner 4: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, also $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
b) Hauptnenner 15: $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$; Summe $\frac{11}{15}$.

c) Hauptnenner 12: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$; Summe $\frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$.
d) Hauptnenner 30: $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$, $\frac{8}{15} = \frac{16}{30}$; Summe $\frac{37}{30} = 1\frac{7}{30}$.
Überschlag zu c): Beide Brüche liegen nahe bei 1, die Summe muss also etwas unter 2 liegen. Das passt.

Lösung zu Aufgabe 5

Wie beim Addieren bringen wir die Brüche zuerst auf den Hauptnenner und subtrahieren dann die Zähler.
a) Hauptnenner 6: $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$, gekürzt $\frac{1}{2}$.
b) Hauptnenner 8: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, also $\frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8}$.
c) Hauptnenner 24: $\frac{11}{12} = \frac{22}{24}$ und $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$. Differenz $\frac{13}{24}$; 13 ist eine Primzahl, also nicht kürzbar.
d) Hauptnenner 30: $\frac{27}{30} - \frac{14}{30} = \frac{13}{30}$.
Antwort: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{13}{30}$.

Lösung zu Aufgabe 6

Wir rechnen Ganze mit Ganzen und Brüche mit Brüchen, nachdem die Brüche gleichnamig sind.
a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$; Ganze $2 + 1 = 3$. Ergebnis $3\frac{7}{12}$.
b) $\frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$; Ganze $3 + 2 = 5$. Ergebnis $5 + 1\frac{3}{8} = 6\frac{3}{8}$.
c) $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$; Ganze $5 - 2 = 3$. Ergebnis $3\frac{1}{4}$.
d) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$. Da $\frac{2}{10}$ kleiner als $\frac{7}{10}$ ist, entbündeln wir ein Ganzes: $4\frac{2}{10} = 3\frac{12}{10}$. Dann $3\frac{12}{10} - 1\frac{7}{10} = 2\frac{5}{10} = 2\frac{1}{2}$.
Probe zu d): $2\frac{1}{2} + 1\frac{7}{10} = 3\frac{12}{10} = 4\frac{1}{5}$. Stimmt.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Der Hauptnenner von 4, 3, 6, 2 und 12 ist 12. In Zwölfteln: Anna 3, Ben 4, Carla 2, David 6, Emma 1. Summe: $\frac{3+4+2+6+1}{12} = \frac{16}{12} = 1\frac{1}{3}$ Pizzen.
b) Eine Pizza reicht nicht, denn $\frac{16}{12}$ ist größer als $\frac{12}{12} = 1$.
c) Zwei Pizzen sind $\frac{24}{12}$. Übrig bleiben $\frac{24}{12} - \frac{16}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ Pizza.
d) In Zwölfteln lassen sich die Anteile direkt vergleichen: David (6) vor Ben (4), Anna (3), Carla (2) und Emma (1).
Antwort: Es wurden $1\frac{1}{3}$ Pizzen gegessen, $\frac{2}{3}$ Pizza bleibt übrig; David aß am meisten, Emma am wenigsten.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Ausgegeben: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$ der Kasse.
b) Übrig: $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.
c) Ein Zwölftel von 120 € sind 10 €. Ausgegeben wurden also $7 \cdot 10 = 70$ €, übrig sind $5 \cdot 10 = 50$ €.

d) Das Buch kostet $\frac{1}{5} \cdot 120 = 24$ €. Danach bleiben $50 - 24 = 26$ €. Mit Brüchen: $\frac{5}{12} - \frac{1}{5} = \frac{25}{60} - \frac{12}{60} = \frac{13}{60}$, und $\frac{13}{60} \cdot 120 = 26$ €.
Antwort: $\frac{7}{12}$ wurde ausgegeben, $\frac{5}{12}$ bleibt (70 € und 50 €); nach dem Buchkauf sind noch 26 € in der Kasse.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Sie hat $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ l und braucht $\frac{3}{4}$ l. Es bleiben $\frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ l Milch.
b) Nach dem Aufbewahren für das Brot bleiben $2\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ Tassen. Das Rezept braucht genau $1\frac{1}{2}$ Tassen. Das Mehl reicht also genau, es bleibt aber nichts übrig.
c) Gesamtzeit: $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$ h. Eine Stunde hat 60 min, ein Zwölftel davon sind 5 min, also $5 \cdot 5 = 25$ min. Kontrolle: 10 min Vorbereitung plus 15 min Backen ergeben 25 min.
Antwort: $\frac{1}{2}$ l Milch bleibt, das Mehl reicht genau, alles dauert 25 Minuten.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Geschafft: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ der Strecke.
b) Es fehlen $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.
c) Ein Zwölftel von 24 km sind 2 km. Es fehlen $5 \cdot 2 = 10$ km, geschafft sind $7 \cdot 2 = 14$ km. Kontrolle: $14 + 10 = 24$.
d) Ein Achtel von 24 km sind 3 km, also sind $\frac{5}{8}$ genau $5 \cdot 3 = 15$ km. Es bleibt $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ der Strecke, das sind $3 \cdot 3 = 9$ km.
Antwort: $\frac{7}{12}$ ist geschafft, $\frac{5}{12}$ (10 km) fehlt; auf der Rückfahrt fahren sie bis zur Pause 15 km, danach bleiben $\frac{3}{8}$ oder 9 km.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Hauptnenner von 5, 10 und 4 ist 20: $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$, $\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$, $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$. Zusammen $\frac{19}{20}$.
b) Ja, es fehlt noch etwas: $1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$ des Teiches.
c) Ein Zwanzigstel von 2000 l ist $2000 : 20 = 100$ l.
d) Tag 1: $\frac{2}{5} \cdot 2000 = 800$ l; Tag 2: $\frac{3}{10} \cdot 2000 = 600$ l; Tag 3: $\frac{1}{4} \cdot 2000 = 500$ l. Zusammen $800 + 600 + 500 = 1900$ l. Kontrolle: $1900 + 100 = 2000$ l.
Antwort: Nach drei Tagen sind $\frac{19}{20}$ gefüllt, es fehlen 100 Liter.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Hauptnenner 12: Laufen $\frac{9}{12}$, Weitsprung $\frac{8}{12}$, Ballwurf $\frac{6}{12}$, Siegerehrung $\frac{2}{12}$. Summe $\frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$ h. Da ein Zwölftel Stunde 5 min sind, dauert das Fest $25 \cdot 5 = 125$ min.
b) 125 min sind 2 h 5 min. Beginn 9:00 Uhr, Ende um 11:05 Uhr.
c) Gleichnamige Brüche kann man an den Zählern vergleichen: 9 > 8 > 6 > 2. Der längste Teil ist das Laufen (45 min), der kürzeste die Siegerehrung (10 min).
Antwort: Das Sportfest dauert $2\frac{1}{12}$ h oder 125 min und endet um 11:05 Uhr.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Wir bringen alle Brüche auf Achtel: $2\frac{1}{4} = 2\frac{2}{8}$, $1\frac{1}{2} = 1\frac{4}{8}$. Summe: $2\frac{2}{8} + \frac{3}{8} + 1\frac{4}{8} = 3\frac{9}{8} = 4\frac{1}{8}$ m.
b) Vom Rest von 5 m bleibt: $5 - 4\frac{1}{8}$. Wir schreiben $5 = 4\frac{8}{8}$, also $4\frac{8}{8} - 4\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ m.
c) Für das zweite Kostüm braucht sie $1\frac{7}{8}$ m, sie hat aber nur $\frac{7}{8}$ m. Das reicht nicht, es fehlt $1\frac{7}{8} - \frac{7}{8} = 1$ m.
Antwort: Sie braucht $4\frac{1}{8}$ m Stoff, es bleiben $\frac{7}{8}$ m übrig, für ein zweites Kostüm fehlt 1 m.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Hauptnenner 24: Schlaf $\frac{8}{24}$, Schule $\frac{6}{24}$, Hausaufgaben $\frac{3}{24}$, Sport $\frac{2}{24}$. Zusammen $\frac{19}{24}$. Freizeit: $1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$.
b) Ein Vierundzwanzigstel des Tages ist eine Stunde, also hat Marlene 5 Stunden Freizeit.
c) Schlaf 8 h, Schule 6 h, Hausaufgaben und Essen 3 h, Sport 2 h; zusammen 19 h.
d) Der ganze Kreis hat $360°$, eine Stunde entspricht $360° : 24 = 15°$. Schlaf $8 \cdot 15° = 120°$, Schule $90°$, Hausaufgaben $45°$, Sport $30°$, Freizeit $75°$. Kontrolle: $120 + 90 + 45 + 30 + 75 = 360$.
Antwort: Marlene hat $\frac{5}{24}$ des Tages, also 5 Stunden, Freizeit.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Hauptnenner 20: $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$, $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{1}{10} = \frac{2}{20}$. Summe $\frac{18}{20}$. Der Rest ist $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.
b) Ein Zwanzigstel von 240 € sind 12 €. Unterkunft $8 \cdot 12 = 96$ €, Fahrt 60 €, Verpflegung 36 €, Ausflüge 24 €, Rest 24 €. Kontrolle: Summe 240 €.
c) Die Verpflegung steigt um $\frac{1}{20}$, die Ausflüge sinken um $\frac{1}{20}$. Beides hebt sich auf, der Rest bleibt $\frac{1}{10}$, also 24 €.
d) Alle Nenner 5, 4, 20 und 10 sind Teiler von 20. Deshalb ist 20 der Hauptnenner, und man kann jeden Anteil mit einem Schritt in Zwanzigstel umrechnen.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Hauptnenner 20: Tim $\frac{5}{20}$, Sara $\frac{6}{20}$, Jonas $\frac{4}{20}$; zusammen $\frac{15}{20}$. Leyla läuft $1 - \frac{15}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ km.
b) 1 km = 1000 m. Tim $\frac{1}{4} \cdot 1000 = 250$ m, Sara $\frac{3}{10} \cdot 1000 = 300$ m, Jonas $\frac{1}{5} \cdot 1000 = 200$ m, Leyla 250 m. Kontrolle: 1000 m.
c) Sara läuft am längsten, Jonas am kürzesten; Tim und Leyla laufen gleich weit.
d) 4 min 30 s sind $4 \cdot 60 + 30 = 270$ s, eine Stunde hat 3600 s. $\frac{270}{3600}$ kürzen wir mit 90 zu $\frac{3}{40}$.
Antwort: Leyla läuft $\frac{1}{4}$ km; die Staffel braucht $\frac{3}{40}$ Stunde.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Gruppe A (Hauptnenner 12): $\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Gruppe B (Hauptnenner 24): $\frac{9}{24}+\frac{6}{24}+\frac{2}{24}=\frac{17}{24}$. Gruppe C (Hauptnenner 20): $\frac{4}{20}+\frac{6}{20}+\frac{5}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.
b) Wir vergleichen in Vierundzwanzigsteln: A und C je $\frac{18}{24}$, B $\frac{17}{24}$. A und C liegen gleichauf vorne, B ist knapp dahinter.
c) A und C fehlt $\frac{1}{4}$ von 18 km, also 4,5 km. B fehlen $\frac{7}{24}\cdot 18=5{,}25$ km.
d) Gruppe C teilt den Rest $\frac{1}{4}$ in zwei gleiche Teile: je $\frac{1}{8}$ der Gesamtstrecke, das sind $18:8=2{,}25$ km.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Der Hauptnenner von 3, 4 und 6 ist 12, daher passt ein Streifen aus 12 Teilen: Kartoffeln $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ (4 Teile), Möhren $\frac{3}{12}$ (3 Teile), Salat $\frac{2}{12}$ (2 Teile), die übrigen 3 Teile sind Blumen.
b) $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9}{12}$. Blumen: $1-\frac{9}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.
c) Ein Zwölftel von 120 m² sind 10 m². Kartoffeln 40 m², Möhren 30 m², Salat 20 m², Blumen 30 m².
d) $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ des Gartens, das sind 20 m².
Antwort: Die Blumen haben $\frac{1}{4}$ des Gartens; nach den Tulpen bleiben $\frac{1}{6}$ für die übrigen Blumen.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Wir erweitern auf Viertel: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Die Gleichung stimmt.
b) Wir zerlegen den Zähler 7 in Teiler von 12: $7=3+4$. Also $\frac{7}{12}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$.
c) Wir beginnen mit dem größten Stammbruch unter $\frac{2}{3}$, das ist $\frac{1}{2}$. Rest: $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$. Also $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.
d) Zähler 11 als Summe von Teilern von 12: $11=6+4+1$. Also $\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$.
Probe: $\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.
Alle Stammbrüche sind jeweils verschieden, wie verlangt.

Lösung zu Aufgabe 20

a) 1) Zähler und Nenner wurden getrennt addiert ($1+1=2$, $3+4=7$); man braucht aber zuerst einen gemeinsamen Nenner. 2) Ebenso wurden Zähler und Nenner getrennt subtrahiert. 3) Ganze und Brüche wurden getrennt gerechnet, obwohl $\frac{1}{4}$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; man muss entbündeln. 4) Wieder wurden Zähler und Nenner einfach addiert.
b) 1) $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$. 2) $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. 3) $3\frac{1}{4}=2\frac{5}{4}$, $2\frac{5}{4}-1\frac{2}{4}=1\frac{3}{4}$. 4) $\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.
c) Ein Überschlag hilft: Eine Differenz ist nie größer als die erste Zahl, also kann $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$ nicht $\frac{4}{3}$ sein. Und $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$ ist größer als $\frac{2}{5}$, aber $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ ist kleiner.

Lösung zu Aufgabe 21

a) Zweite Reihe: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$. Spitze: $\frac{3}{4}+\frac{7}{12}=\frac{9}{12}+\frac{7}{12}=\frac{16}{12}=1\frac{1}{3}$.
b) Wir nennen die Mitte m. Die zweite Reihe lautet $\frac{1}{2}+m$ und $m+\frac{1}{3}$. Die Spitze ist ihre Summe: $2m+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=2m+\frac{5}{6}$. Sie soll 2 sein, also $2m=2-\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$ und $m=\frac{7}{12}$.
Probe: $\frac{1}{2}+\frac{7}{12}=\frac{13}{12}$, $\frac{7}{12}+\frac{1}{3}=\frac{11}{12}$, Summe $\frac{24}{12}=2$. In der Mitte steht $\frac{7}{12}$.