Lernzettel - Terme, Gleichungen und Textaufgaben

Klasse: Klasse 5

Mit Termen und Gleichungen beschreibst du viele Rechnungen auf einmal und findest unbekannte Zahlen. Das ist der erste Schritt zur Algebra.

Einstieg: Das Rätsel mit dem Geldbeutel

Lena hat Geld im Beutel. Sie legt $5\,€$ dazu und hat nun $17\,€$. Wie viel war vorher im Beutel? Du rechnest rückwärts: $17 - 5 = 12$. Genau das tut man bei einer Gleichung, nur mit einem Platzhalter: $x + 5 = 17$. In diesem Kapitel schreibst du Rechenanweisungen als Terme auf, löst Gleichungen mit der Umkehroperation und übersetzt Textaufgaben in die Sprache der Mathematik.

Terme und Variablen

Definition: Term

Ein **Term** ist ein sinnvoller Rechenausdruck aus Zahlen, Rechenzeichen und eventuell Klammern, zum Beispiel $12 + 7$, $3 \cdot (8 + 5)$ oder $48 : 6 - 2$.

Definition: Variable

Eine **Variable** ist ein Platzhalter für eine Zahl, meist ein kleiner Buchstabe wie x oder n. Das Malzeichen zwischen Zahl und Variable lässt man oft weg: $3x$ bedeutet $3 \cdot x$.

Terme aus Worten aufstellen

Regel: Signalwörter

Summe, vermehrt um, plus: Addition. **Differenz**, vermindert um, weniger: Subtraktion. **Produkt**, das Doppelte, das Dreifache: Multiplikation. **Quotient**, die Hälfte, geteilt durch: Division.

Beispiel 1: Terme aufstellen

Stelle Terme auf: die Summe von 12 und 7, die Differenz von 20 und 8, das Dreifache von 5, der Quotient von 48 und 6.

$12 + 7$, $20 - 8$, $3 \cdot 5$, $48 : 6$.

Beispiel 2: Auf die Klammern achten

Stelle Terme auf: „Die Summe aus 8 und 5 wird mit 3 multipliziert“ und „Das Dreifache von 5, vermehrt um 4“.

$(8+5)\cdot 3=39$ und $3\cdot 5+4=19$. Ohne Klammern wäre der erste Term falsch.

Den Wert eines Terms berechnen

Definition: Termwert

Setzt man für die Variable eine Zahl ein, kann man den **Termwert** ausrechnen. Eine **Wertetabelle** zeigt die Termwerte für mehrere Zahlen.

Beispiel 3: Einsetzen

Berechne $x+7$ für $x=5$ und $3\cdot x-2$ für $x=4$. Fülle eine Wertetabelle für $4n+1$.

$5+7=12$ und $3\cdot 4-2=10$. Für $4n+1$ mit $n=1,2,3,4$ erhält man 5, 9, 13, 17. Beachte Klammern zuerst und Punkt vor Strich.

Gleichungen

Definition: Gleichung

Verbindet man zwei Terme mit einem Gleichheitszeichen, entsteht eine **Gleichung**, zum Beispiel $x+9=15$. Die Zahl, die die Gleichung wahr macht, heißt **Lösung**. Hier ist $x=6$, denn $6+9=15$.

Merke: Waage

Eine Gleichung ist wie eine Waage im Gleichgewicht. Wenn du auf beiden Seiten dasselbe tust, bleibt sie im Gleichgewicht.

Gleichungen lösen

Regel: Umkehroperationen

$x+9=15$ ergibt $x=15-9=6$. $x-7=12$ ergibt $x=12+7=19$. $4\cdot x=36$ ergibt $x=36:4=9$. $x:5=8$ ergibt $x=8\cdot 5=40$.

So gehst du vor: Rückwärtsrechnen

1. Überlege, welche Rechenschritte mit x gemacht wurden.
2. Kehre die Schritte in *umgekehrter* Reihenfolge um.
3. Mache die Probe: Setze die Lösung in die Gleichung ein.

Beispiel 4: Zwei Rechenschritte

Löse $3 \cdot x + 5 = 23$.

Zuerst wurde mit 3 multipliziert, dann 5 addiert. Rückwärts: $23 - 5 = 18$, dann $18 : 3 = 6$. Also $x = 6$. Probe: $3 \cdot 6 + 5 = 23$.

Beispiel 5: Mit Klammer

Löse $2 \cdot (x - 1) = 14$.

Rückwärts: $14 : 2 = 7$, dann $7 + 1 = 8$, also $x = 8$.

Hinweis

Manche Gleichungen haben in den natürlichen Zahlen keine Lösung, zum Beispiel $x + 8 = 5$, weil keine natürliche Zahl plus 8 kleiner als 8 sein kann.

Textaufgaben lösen

So gehst du vor: Textaufgaben mit Gleichungen

1. Lies die Frage und lege fest, wofür x steht.
2. Stelle aus dem Text eine Gleichung auf.
3. Löse die Gleichung und mache die Probe am Text.
4. Schreibe einen Antwortsatz.

Beispiel 6: Geld

Tom hat 3 € mehr als Lena. Zusammen haben sie 17 €. Wie viel hat jeder?

Es sei x das Geld von Lena, dann hat Tom $x + 3$. Gleichung: $x + (x + 3) = 17$, also $2x + 3 = 17$, $2x = 14$, $x = 7$. Lena hat 7 €, Tom hat 10 €. Probe: $7 + 10 = 17$.

Beispiel 7: Zahlenrätsel

Ich denke mir eine Zahl, multipliziere sie mit 4 und subtrahiere 6. Ich erhalte 22.

$4x - 6 = 22$. Rückwärts: $22 + 6 = 28$, $28 : 4 = 7$. Die Zahl ist 7.

Beispiel 8: Formel

Beim Rechteck gilt $u = 2a + 2b$. Wie groß ist b für $a = 7$ und $u = 30$?

$14 + 2b = 30$, also $2b = 16$ und $b = 8$.

Beispiel 9: Streichholzmuster

Quadrate in einer Reihe: Das erste braucht 4 Hölzer, jedes weitere 3. Term für n Quadrate: $3n+1$. Wie viele Quadrate gibt es mit 31 Hölzern?

$3n+1=31$, also $3n=30$ und $n=10$. Für 5 Quadrate braucht man $3\cdot 5+1=16$ Hölzer.

Beispiel 10: Handytarif

Ein Tarif kostet 5 € Grundgebühr plus 2 € je Gigabyte. Wie viele Gigabyte gibt es für 21 €?

$5+2x=21$, $2x=16$, $x=8$. Bei 4 Gigabyte zahlt man $5+8=13$ €.

Beispiel 11: Gleichung aus einer Sachaufgabe

Tim kauft 4 Hefte und einen Stift für *1{,}50\,€*. Er bezahlt *7{,}30\,€*. Wie viel kostet ein Heft?

Sei x der Preis eines Heftes. Dann gilt $4\cdot x+1{,}50=7{,}30$. Rückwärts: $7{,}30-1{,}50=5{,}80$, danach $5{,}80:4=1{,}45$. Ein Heft kostet *1{,}45\,€*. Probe: $4\cdot 1{,}45+1{,}50=5{,}80+1{,}50=7{,}30$. Stimmt.

Beispiel 12: Wertetabelle und Muster

Lege eine Wertetabelle für den Term $2n+3$ an und beschreibe das Muster.

Für $n=1$ bis 5 erhält man $5, 7, 9, 11, 13$. Von Wert zu Wert wächst der Term um 2, denn 2 ist der Faktor vor n. Der Term beschreibt zum Beispiel die Zahl der Hölzer in einer Kette: Ein Anfangsstück braucht 3, jedes weitere Glied 2 Hölzer.

Beispiel 13: Termwert mit Punkt vor Strich

Berechne $3\cdot x+2\cdot(x+4)$ für $x=5$.

Einsetzen: $3\cdot 5+2\cdot(5+4)$. Klammer zuerst: $5+4=9$. Punkt vor Strich: $15+18=33$. Beim Einsetzen schreibt man die Zahl immer in eine eigene Klammer, wenn Vorzeichen oder Rechenzeichen davor stehen.

Beispiel 14: Zwei Gleichungen im Vergleich

Tarif A kostet *3\,€* plus *0{,}20\,€* pro Minute, Tarif B kostet *0{,}30\,€* pro Minute. Bei wie vielen Minuten sind beide gleich teuer?

Man probiert mit einer Wertetabelle: Bei 20 Minuten kostet A *7\,€*, B *6\,€*; bei 40 Minuten kostet A *11\,€*, B *12\,€*. Dazwischen liegt der Gleichstand. Genauer: $3+0{,}2m=0{,}3m$, also $3=0{,}1m$, $m=30$. Bei 30 Minuten zahlt man bei beiden *9\,€*. Wer weniger telefoniert, fährt mit B günstiger, wer mehr telefoniert, mit A.

Beispiel 15: Von der Figur zum Term

Ein Quadrat hat die Seitenlänge a, ein Rechteck die Länge a und die Breite 3. Gib Terme für beide Umfänge an und berechne sie für $a = 5\,\text{cm}$.

Quadrat: $U = 4 \cdot a = 4 \cdot 5 = 20\,\text{cm}$. Rechteck: $U = 2 \cdot a + 2 \cdot 3 = 2a + 6 = 2 \cdot 5 + 6 = 16\,\text{cm}$. Mit einem Term kann man den Umfang für jede Seitenlänge schnell ausrechnen, ohne die Aufgabe neu zu lesen.

Typische Fehler

(1) Beim Aufstellen von Termen die Klammer vergessen: „das Doppelte der Summe aus x und 3“ ist $2 \cdot (x + 3)$, nicht $2 \cdot x + 3$. (2) Bei Gleichungen nur eine Seite umformen: Beide Seiten müssen gleich behandelt werden. (3) Die Probe weglassen: Sie findet fast jeden Fehler. (4) $3x$ mit $x + 3$ verwechseln: Beim ersten wird multipliziert, beim zweiten addiert. (5) Beim Rückwärtsrechnen die Reihenfolge nicht umkehren: Wer zuerst multipliziert und dann addiert hat, muss zuerst subtrahieren und dann dividieren.

Wusstest du?

Das Gleichheitszeichen $=$ erfand der walisische Gelehrte Robert Recorde im Jahr 1557. Er schrieb, es gebe nichts Gleicheres als zwei parallele Strecken. Vorher schrieben Mathematiker „ist gleich“ aus. Der Name „Algebra“ kommt vom arabischen Buch „al-jabr“ des Gelehrten al-Chwarizmi, der um das Jahr 820 in Bagdad lebte; von seinem Namen leitet sich auch das Wort „Algorithmus“ ab.

So gehst du vor: Textaufgaben mit Gleichungen

1. Lies die Aufgabe genau und unterstreiche die Frage.
2. Lege die Variable fest, zum Beispiel x für die gesuchte Zahl.
3. Stelle aus dem Text einen Term oder eine Gleichung auf.
4. Löse die Gleichung mit den Umkehroperationen.
5. Mache die Probe am Text der Aufgabe, nicht nur an der Gleichung.
6. Schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Mathematik als Sprache

Terme und Gleichungen sind eine Art Kurzschrift. Statt einen langen Satz zu schreiben, nutzt du Zahlen, Buchstaben und Rechenzeichen. Aus dem Satz, dass ein Eis pro Kugel einen Euro zwanzig kostet, wird ein kurzer Term, in dem ein Buchstabe die Anzahl der Kugeln vertritt. Das hat einen großen Vorteil: Der Term gilt für jede Anzahl, und man muss nicht jedes Mal von vorn überlegen. Wer diese Sprache versteht, kann komplizierte Probleme übersichtlich aufschreiben und systematisch lösen.

Wichtig ist die Übersetzung in beide Richtungen. Du musst aus einem Text einen Term

bauen können, und du musst einen Term wieder in Worte fassen können. Achte dabei auf Signalwörter: Summe heißt addieren, Differenz heißt subtrahieren, Produkt heißt multiplizieren, Quotient heißt dividieren, das Doppelte heißt mal zwei.

Beispiel 16: Eine Gleichung aus dem Alltag

Maja hat 15 Euro gespart. Sie will ein Buch für 28 Euro kaufen und bekommt jede Woche 4 Euro Taschengeld, das sie spart. Nach wie vielen Wochen reicht ihr Geld?

Wir nennen die Anzahl der Wochen x. Nach x Wochen hat Maja 15 plus 4 mal x Euro. Das soll mindestens 28 Euro sein. Wir lösen die Gleichung 15 plus 4x gleich 28 rückwärts: Von 28 ziehen wir 15 ab und erhalten 13. Dann teilen wir 13 durch 4 und erhalten 3 Rest 1. Nach drei Wochen hat sie 27 Euro, das reicht noch nicht, nach vier Wochen hat sie 31 Euro. Also muss Maja vier Wochen warten.

Beispiel 17: Gleichungen mit der Waage veranschaulichen

Was bedeutet die Gleichung x plus 6 gleich 14 an einer Waage?

Stell dir eine Waage im Gleichgewicht vor. Links liegt ein unbekanntes Gewicht x und dazu 6 Gramm, rechts liegen 14 Gramm. Nimmst du auf beiden Seiten 6 Gramm weg, bleibt die Waage im Gleichgewicht. Links liegt dann nur noch x, rechts liegen 8 Gramm. Also ist x gleich 8. Der Grundsatz heißt: Was man auf einer Seite tut, muss man auf der anderen Seite auch tun, sonst kippt die Waage.

So gehst du vor: Probe an der Textaufgabe

Setze die gefundene Zahl in den Text der Aufgabe ein, nicht nur in die Gleichung. Rechne die Geschichte noch einmal nach. Passt das Ergebnis zur Frage? Hast du die richtige Einheit angegeben? Häufig stellt man dabei fest, dass eine Lösung mathematisch stimmt, aber im Alltag keinen Sinn ergibt, etwa eine halbe Person oder eine negative Zeit. Dann muss man die Lösung deuten oder die Gleichung noch einmal überprüfen.

Wertetabellen und Muster

Mit einem Term kann man eine Wertetabelle anlegen. Du setzt nacheinander die Zahlen eins, zwei, drei und so weiter ein und trägst die Ergebnisse ein. Oft erkennt man dann ein Muster: Die Werte wachsen gleichmäßig. Dieses gleichmäßige Wachsen steckt im Faktor vor dem Buchstaben. So beschreiben Terme zum Beispiel Streichholzketten, Preise oder Wegstrecken. Wer ein Muster in einen Term übersetzt, kann sofort jeden beliebigen Wert vorhersagen, ohne alle Schritte zu zeichnen.

Wusstest du? Rätsel aus alter Zeit

Schon die alten Ägypter lösten Aufgaben, die wir heute mit Gleichungen aufschreiben.

In einem Papyrus steht die Aufgabe: Eine Menge und ihr Siebtel ergeben zusammen neunzehn. Sie lösten solche Rätsel mit dem Verfahren des falschen Ansatzes, also durch geschicktes Probieren. Die Schreibweise mit Buchstaben wurde erst viel später entwickelt, vor allem von arabischen und später europäischen Gelehrten. Heute nutzt jede Tabellenkalkulation und jedes Computerprogramm Terme, um Ergebnisse zu berechnen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein Term ist eine Rechenanweisung aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen, zum Beispiel $3x + 5$.
- Eine Variable (Platzhalter) steht für eine Zahl; setzt man eine Zahl ein, erhält man den Termwert.
- Signalwörter helfen beim Aufstellen: Summe $+$, Differenz $-$, Produkt $\cdot$, Quotient $:$, Doppeltes $2\cdot$, Hälfte $: 2$.
- Eine Gleichung besteht aus zwei Termen mit einem Gleichheitszeichen; eine Lösung macht beide Seiten gleich.
- Gleichungen löst man mit Umkehroperationen: Rechenschritte in umgekehrter Reihenfolge rückgängig machen.
- Die Probe durch Einsetzen in die Gleichung (und in den Text der Aufgabe) kontrolliert die Lösung.
- Textaufgaben: Variable festlegen, Gleichung aufstellen, lösen, Probe machen, Antwortsatz mit Einheit schreiben.

Achtung

Bei zwei Rechenschritten wird oft in falscher Reihenfolge zurückgerechnet: Bei $3x + 5 = 23$ musst du zuerst 5 abziehen, nicht durch 3 teilen. Vergiss nicht die Probe, die Klammern und den Antwortsatz.

Ottos Tipp

Schreibe immer hin, wofür das x steht. Dann verwechselst du bei Textaufgaben nicht, was du am Ende angeben musst!