# Lernzettel - Teilbarkeit und Primzahlen

Klasse: Klasse 5

Teilbarkeit hilft dir beim Rechnen, beim Kürzen und bei Aufgaben zum gerechten Verteilen. Hier lernst du Teiler, Vielfache, Primzahlen, ggT und kgV.

**Einstieg: Gerecht verteilen**

Du hast $24$ Fußballkarten und willst sie ohne Rest an Freunde verteilen. Geht das an $2$, an $5$ oder an $8$ Freunde? Mit $2$ und $8$ klappt es, mit $5$ nicht. Solche Fragen beantwortet die Teilbarkeit. Außerdem begegnen dir in diesem Kapitel besondere Zahlen, die sich nicht weiter zerlegen lassen: die Primzahlen. Sie sind die Bausteine aller natürlichen Zahlen.

## Teiler und Vielfache

**Definition: Teiler**

Eine Zahl $a$ heißt **Teiler** von $b$, wenn $b : a$ ohne Rest aufgeht. Man schreibt $a \mid b$ (gesprochen: a teilt b).

**Definition: Vielfaches**

Ist $a$ ein Teiler von $b$, dann heißt $b$ ein **Vielfaches** von $a$. Die Vielfachen von 7 sind 7, 14, 21, 28, 35, ... und es gibt unendlich viele.

**Merke**

Jede Zahl hat mindestens die Teiler 1 und sich selbst.

**So gehst du vor: Alle Teiler finden**

1. Schreibe die Zahl als Produkt zweier Faktoren: $1 \cdot n$, $2 \cdot \ldots$, $3 \cdot \ldots$ und so weiter.
2. Probiere der Reihe nach 1, 2, 3, ... bis die Faktoren sich treffen.
3. Notiere beide Faktoren jedes Paares.

**Beispiel 1: Teiler von 36**

**Bestimme alle Teiler von 36.**

$1 \cdot 36$, $2 \cdot 18$, $3 \cdot 12$, $4 \cdot 9$, $6 \cdot 6$. Die Teiler sind 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 und 36.

**Beispiel 2: Teiler und Vielfache**

**Ist 6 ein Teiler von 42?**

Ja, denn $42 : 6 = 7$. Also ist 42 ein Vielfaches von 6. Die Teiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6 und 12.

## Teilbarkeitsregeln

**Regel: Endziffern**

**Durch 2:** letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8. **Durch 5:** letzte Ziffer 0 oder 5. **Durch 10:** letzte Ziffer 0. **Durch 4:** die letzten beiden Ziffern bilden eine durch 4 teilbare Zahl. **Durch 25:** die letzten beiden Ziffern sind 00, 25, 50 oder 75. **Durch 8:** die letzten drei Ziffern bilden eine durch 8 teilbare Zahl.

**Regel: Quersumme**

Die **Quersumme** ist die Summe aller Ziffern. Ist sie durch 3 teilbar, ist die Zahl durch 3 teilbar. Ist sie durch 9 teilbar, ist die Zahl durch 9 teilbar. Durch 6 ist eine Zahl teilbar, wenn sie durch 2 *und* durch 3 teilbar ist.

**Merke: Summen und Differenzen**

Sind zwei Zahlen durch $a$ teilbar, dann auch ihre Summe und ihre Differenz.

**Beispiel 3: Regeln anwenden**

**Ist 4 230 durch 3 teilbar? Ist 3 316 durch 4 teilbar? Ist 7 128 durch 8 teilbar?**

Quersumme von 4 230: $4 + 2 + 3 + 0 = 9$, also durch 3 und durch 9 teilbar. Bei 3 316 ist 16 durch 4 teilbar, also ja. Bei 7 128 gilt 128 : 8 = 16, also ja.

## Primzahlen

**Definition: Primzahl**

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl mit genau zwei Teilern: 1 und sich selbst. Zahlen mit mehr als zwei Teilern heißen **zusammengesetzte Zahlen**.

**Merke**

Die ersten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 und 47. Die 1 ist keine Primzahl. Die 2 ist die einzige gerade Primzahl.

**So gehst du vor: Sieb des Eratosthenes**

1. Schreibe die Zahlen von 2 bis 100 auf.
2. Streiche alle Vielfachen von 2 (außer der 2 selbst).
3. Streiche ebenso die Vielfachen von 3, 5, 7.
4. Die Zahlen, die übrig bleiben, sind Primzahlen.

**Beispiel 4: Prim oder nicht?**

**Ist 91 eine Primzahl?**

Nein, denn $91 = 7 \cdot 13$. Die Zahl 91 hat also mehr als zwei Teiler. Zwei Primzahlen mit Abstand 2, etwa 11 und 13, heißen Primzahlzwillinge.

## Primfaktorzerlegung

**Satz**

Jede natürliche Zahl größer als 1 lässt sich **eindeutig** als Produkt von Primzahlen schreiben (bis auf die Reihenfolge).

**So gehst du vor: Primfaktorzerlegung**

1. Teile die Zahl durch die kleinste mögliche Primzahl.
2. Teile das Ergebnis wieder durch die kleinste mögliche Primzahl.
3. Mache weiter, bis 1 herauskommt.
4. Schreibe gleiche Faktoren als Potenz.

**Beispiel 5: Zerlegen**

**Zerlege 60 und 84 in Primfaktoren.**

$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.
$84 = 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$.

## Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

**Definition: ggT**

Der **ggT** zweier Zahlen ist der größte Teiler, den beide gemeinsam haben. Mit Primfaktoren nimmt man jeden gemeinsamen Primfaktor mit dem *kleineren* Exponenten.

**Beispiel 6: ggT bestimmen**

**Bestimme** $\mathrm{ggT}(24;36)$**.**

Teiler von 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Teiler von 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Der

größte gemeinsame Teiler ist 12. Mit Primfaktoren: $24 = 2^3 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, also $\text{ggT} = 2^2 \cdot 3 = 12$.

**Hinweis**

Der ggT hilft beim Aufteilen in möglichst große gleiche Gruppen und später beim Kürzen von Brüchen.

## Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

**Definition: kgV**

Das **kgV** zweier Zahlen ist das kleinste Vielfache, das beiden gemeinsam ist. Mit Primfaktoren nimmt man jeden vorkommenden Primfaktor mit dem *größeren* Exponenten.

**Beispiel 7: kgV bestimmen**

**Bestimme $\text{kgV}(6;8)$ und $\text{kgV}(12;18)$.**

Vielfache von 6: 6, 12, 18, 24, 30. Vielfache von 8: 8, 16, 24, 32. Das erste gemeinsame ist 24. Mit Primfaktoren: $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, also $\text{kgV} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

**Hinweis**

Das kgV braucht man bei Fahrplänen (zwei Busse treffen sich wieder) und später beim Addieren von Brüchen mit verschiedenen Nennern.

**Beispiel 8: Teilbarkeit durch $6$**

**Ist $1\,524$ durch $6$ teilbar?**

Eine Zahl ist durch $6$ teilbar, wenn sie durch $2$ und durch $3$ teilbar ist. Die letzte Ziffer $4$ ist gerade, also ist $1\,524$ durch $2$ teilbar. Die Quersumme $1 + 5 + 2 + 4 = 12$ ist durch $3$ teilbar, also auch die Zahl. Folglich ist $1\,524$ durch $6$ teilbar. Probe: $1\,524 : 6 = 254$.

**Beispiel 9: Kürzen mit dem ggT**

**Wie viele Mannschaften mit gleich vielen Mädchen und Jungen kann man aus $18$ Mädchen und $24$ Jungen bilden?**

Gesucht ist ein gemeinsamer Teiler von $18$ und $24$, und zwar möglichst groß. $18 = 2 \cdot 3^2$, $24 = 2^3 \cdot 3$. Der ggT ist $2 \cdot 3 = 6$. Es entstehen also höchstens $6$ Mannschaften mit je $3$ Mädchen und $4$ Jungen.

**Beispiel 10: Treffen mit dem kgV**

**Zwei Radfahrer fahren eine Runde um den See. Anna braucht $6$ Minuten, Ben $8$ Minuten. Sie starten gleichzeitig. Wann sind sie das nächste Mal gemeinsam am Start?**

Annas Zeiten: $6, 12, 18, 24, \ldots$, Bens Zeiten: $8, 16, 24, \ldots$. Das kleinste gemeinsame Vielfache ist $24$. Nach $24$ Minuten sind beide wieder am Start; Anna ist dann $4$ Runden gefahren, Ben $3$ Runden.

## Typische Fehler

(1) Die $1$ als Primzahl bezeichnen: Sie hat nur einen Teiler. (2) Bei der Teilersuche Teiler vergessen, besonders die großen: Immer Paare bilden ($36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$). (3) ggT und kgV verwechseln: Der ggT ist immer höchstens so groß wie die kleinere Zahl, das kgV mindestens so groß wie die größere. (4) Beim kgV einen Primfaktor doppelt zählen, obwohl er in beiden Zahlen vorkommt: Man nimmt jeden Primfaktor mit der höchsten Potenz.

## Wusstest du?

Der griechische Gelehrte Eratosthenes von Kyrene lebte vor etwa $2\,200$ Jahren. Er fand ein Verfahren, Primzahlen zu finden, das noch heute „Sieb des Eratosthenes“ heißt. Und noch etwas: Heute nutzen Computer riesige Primzahlen, um Daten zu verschlüsseln, zum Beispiel bei der Zahlung im Internet. Die größte bekannte Primzahl hat über $40$ Millionen Stellen.

## Teilbarkeit im Alltag

Immer wenn du etwas gerecht verteilen willst, spielt Teilbarkeit eine Rolle. Zwölf Kinder können sich in zwei, drei, vier oder sechs gleich große Gruppen aufteilen, aber nicht in fünf. Genau das sagt die Menge der Teiler von zwölf. Ein Bäcker, der Brötchen in Tüten packt, ein Trainer, der Mannschaften bildet, oder ein Gärtner, der Beete anlegt: Alle brauchen Teiler und Vielfache. Wer die Teilbarkeitsregeln kennt, muss nicht lange rechnen, sondern erkennt sofort, ob eine Zahl durch zwei, drei, fünf oder neun teilbar ist.

Dabei helfen drei Beobachtungen. Erstens zeigt die letzte Ziffer, ob eine Zahl durch zwei, fünf oder zehn teilbar ist. Zweitens verrät die Quersumme, ob sie durch drei oder neun teilbar ist. Drittens kann man Regeln kombinieren: Wer durch zwei und durch drei teilbar ist, ist auch durch sechs teilbar.

## Beispiel 11: Teiler mit Paaren finden

**Finde alle Teiler von 72.**

Wir suchen Paare, deren Produkt 72 ergibt, und beginnen bei eins. Eins mal 72, zwei mal 36, drei mal 24, vier mal 18, sechs mal 12 und acht mal 9. Fünf und sieben gehen nicht auf. Ab neun wiederholen sich die Paare, deshalb können wir aufhören. Die Teiler sind also 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 und 72. Diese Methode ist übersichtlich und

verhindert, dass man einen Teiler vergisst.

### Beispiel 12: Primfaktoren mit dem Faktorbaum

**Zerlege 120 in Primfaktoren.**

Wir teilen immer durch die kleinste mögliche Primzahl. 120 durch 2 ergibt 60, 60 durch 2 ergibt 30, 30 durch 2 ergibt 15, 15 durch 3 ergibt 5, und 5 ist selbst eine Primzahl. Die Primfaktoren sind dreimal die 2, einmal die 3 und einmal die 5. Zur Probe multiplizierst du alle Faktoren: 2 mal 2 mal 2 mal 3 mal 5 ergibt wieder 120. Die Zerlegung ist eindeutig: Egal, in welcher Reihenfolge du teilst, am Ende bekommst du dieselben Primfaktoren.

### So gehst du vor: ggT und kgV mit der Zerlegung

Zerlege beide Zahlen in Primfaktoren. Für den ggT nimmst du nur die Primfaktoren, die in beiden Zerlegungen vorkommen, jeweils mit der kleineren Anzahl. Für das kgV nimmst du alle Primfaktoren, die in mindestens einer Zerlegung vorkommen, jeweils mit der größeren Anzahl. Multipliziere die gewählten Faktoren. So kannst du beide Werte systematisch bestimmen, auch bei größeren Zahlen, bei denen Aufzählen mühsam wäre.

### Wofür braucht man ggT und kgV?

Der größte gemeinsame Teiler hilft, wenn man etwas in möglichst große gleiche Portionen aufteilen will, ohne dass ein Rest bleibt. Er wird auch beim Kürzen von Brüchen gebraucht. Das kleinste gemeinsame Vielfache hilft, wenn zwei Abläufe in unterschiedlichem Takt immer wieder zusammentreffen, zum Beispiel zwei Buslinien oder zwei blinkende Lichter. Er wird auch beim Addieren von Brüchen mit verschiedenen Nennern benötigt. Wenn du die beiden Begriffe sicher unterscheiden kannst, fällt dir später das Rechnen mit Brüchen viel leichter.

### Wusstest du? Primzahlen im Alltag

Primzahlen sind nicht nur ein Thema für die Schule. Jedes Mal, wenn du im Internet bezahlst oder eine Nachricht verschickst, schützen große Primzahlen deine Daten. Der Grund: Zwei riesige Primzahlen miteinander zu multiplizieren ist leicht, aber aus dem Produkt die beiden Faktoren zurückzugewinnen ist für Computer extrem schwer. Auch die Natur kennt Primzahlen: Manche Zikaden-Arten in Nordamerika erscheinen nur alle dreizehn oder siebzehn Jahre, beides Primzahlen. So treffen sie selten mit ihren Fressfeinden zusammen. Es lohnt sich also, Primzahlen genau zu kennen.

### Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Teiler von $n$ teilen $n$ ohne Rest; Vielfache von $n$ erhält man mit $n \cdot 1, n \cdot 2, n \cdot 3, \ldots$.

- Endziffernregeln: durch $2$ teilbar bei gerader Endziffer, durch $5$ bei $0$ oder $5$, durch $10$ bei $0$.
- Quersummenregeln: Ist die Quersumme durch $3$ (oder $9$) teilbar, so ist es auch die Zahl.
- Eine Primzahl hat genau zwei Teiler ($1$ und sich selbst); die $2$ ist die einzige gerade Primzahl, die $1$ ist keine Primzahl.
- Jede natürliche Zahl größer als $1$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primfaktoren schreiben.
- Der ggT ist der größte gemeinsame Teiler (gemeinsame Primfaktoren mit kleinster Potenz); er hilft beim Verteilen und Kürzen.
- Das kgV ist das kleinste gemeinsame Vielfache (alle Primfaktoren mit größter Potenz); es hilft bei Treffen und Takten.

**Achtung**

Die 1 ist keine Primzahl, und die 9 ist keine, obwohl sie ungerade ist. Der ggT ist immer kleiner oder gleich beiden Zahlen, das kgV immer größer oder gleich. Bei der Primfaktorzerlegung muss jeder Faktor selbst eine Primzahl sein.

**Ottos Tipp**

Lerne die Primzahlen bis 50 auswendig und teste beim Zerlegen immer der Reihe nach 2, 3, 5, 7. Findest du bis zur „Wurzelgröße“ keinen Teiler, ist die Zahl prim.