Lösungen - Teilbarkeit und Primzahlen

Klasse: Klasse 5

Lösung zu Aufgabe 1

Wir suchen Teilerpaare, deren Produkt die Zahl ergibt, und beginnen bei 1. Sobald sich die Paare wiederholen, sind wir fertig.
a) 48: $1 \cdot 48$, $2 \cdot 24$, $3 \cdot 16$, $4 \cdot 12$, $6 \cdot 8$. $T_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. 5 ist kein Teiler, 7 auch nicht, und nach 6 kommt schon 8 aus dem Paar $6 \cdot 8$.
b) 60: $1 \cdot 60$, $2 \cdot 30$, $3 \cdot 20$, $4 \cdot 15$, $5 \cdot 12$, $6 \cdot 10$. $T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.
c) 100: $1 \cdot 100$, $2 \cdot 50$, $4 \cdot 25$, $5 \cdot 20$, $10 \cdot 10$. $T_{100} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.
d) 48 hat 10 Teiler, 60 hat 12, 100 hat 9. 100 hat eine ungerade Anzahl, weil $10 \cdot 10$ nur einen Teiler liefert.

Lösung zu Aufgabe 2

Vielfache sind die Ergebnisse der Einmaleinsreihe.
a) $7 \cdot 1 = 7$, $7 \cdot 2 = 14$, $7 \cdot 3 = 21$, $7 \cdot 4 = 28$, $7 \cdot 5 = 35$.
b) Vielfache von 12: ..., 48, 60, 72, 84, 96, 108, ... Zwischen 50 und 100 liegen 60, 72, 84 und 96.
c) Ja. Die Quersumme von 135 ist $1 + 3 + 5 = 9$, also ist 135 durch 9 teilbar. Tatsächlich ist $9 \cdot 15 = 135$.
d) $13 \cdot 7 = 91$ ist noch kleiner als 100, $13 \cdot 8 = 104$ ist größer. Das gesuchte Vielfache ist 104.

Lösung zu Aufgabe 3

Regeln: durch 2, wenn die letzte Ziffer gerade ist; durch 5, wenn sie 0 oder 5 ist; durch 10, wenn sie 0 ist; durch 3 bzw. 9, wenn die Quersumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.
a) 135: Quersumme 9, letzte Ziffer 5. Teilbar durch 3, 5 und 9; nicht durch 2 und 10.
b) 2340: Quersumme 9, letzte Ziffer 0. Teilbar durch 2, 3, 5, 9 und 10.
c) 4572: Quersumme 18, letzte Ziffer 2. Teilbar durch 2, 3 und 9; nicht durch 5 und 10.
d) 7001: Quersumme 8, letzte Ziffer 1. Durch keine der fünf Zahlen teilbar.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Durch 5 teilbar heißt: letzte Ziffer 0 oder 5. Also 470 oder 475.
b) Die bekannten Ziffern haben die Quersumme $3 + 6 = 9$. Die Gesamtquersumme $9 + \star$ muss durch 3 teilbar sein: $\star$ ist 0, 3, 6 oder 9. Möglich sind 306, 336, 366, 396.
c) Durch 2 teilbar: $\star$ gerade. Durch 3 teilbar: $5 + 1 + \star = 6 + \star$ durch 3 teilbar, also $\star$ ist 0, 3, 6 oder 9. Beides zusammen: $\star = 0$ oder $\star = 6$, also 510 oder 516.
d) Quersumme $8 + 4 + \star = 12 + \star$ muss durch 9 teilbar sein, also 18: $\star = 6$. Die Zahl ist 864. Probe: $864 = 9 \cdot 96$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Primzahlen bis 30: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Man findet sie mit dem Sieb des Eratosthenes: Vielfache von 2, 3, 5 streichen.
b) 51: Quersumme 6, also durch 3 teilbar, $51 = 3 \cdot 17$, keine Primzahl. 57: Quersumme 12, $57 = 3 \cdot 19$, keine Primzahl. 91: $91 = 7 \cdot 13$, keine Primzahl, obwohl man das nicht sofort sieht. 97: nicht durch 2, 3, 5 oder 7 teilbar; da $11 \cdot 11 = 121 > 97$, muss man nicht weiter prüfen. 97 ist eine Primzahl.
c) Die einzige gerade Primzahl ist 2.
d) Jede andere gerade Zahl hat außer 1 und sich selbst noch den Teiler 2. Sie hat also mindestens drei Teiler und ist keine Primzahl.

Lösung zu Aufgabe 6

Wir teilen so lange durch die kleinste passende Primzahl, bis 1 übrig bleibt.
a) $60 : 2 = 30$, $30 : 2 = 15$, $15 : 3 = 5$, $5 : 5 = 1$. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Probe: $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
b) $84 : 2 = 42$, $42 : 2 = 21$, $21 : 3 = 7$. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Probe: $4 \cdot 21 = 84$.
c) $150 : 2 = 75$, $75 : 3 = 25$, $25 : 5 = 5$. $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Probe: $6 \cdot 25 = 150$.
d) $225 : 3 = 75$, $75 : 3 = 25$, $25 : 5 = 5$. $225 = 3^2 \cdot 5^2$. Probe: $9 \cdot 25 = 225$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Gemeinsame Teiler von 24 und 36: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Der größte ist 12.
b) $48 = 2^4 \cdot 3$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Gemeinsam sind 2^3 und 3: ggT $= 8 \cdot 3 = 24$. Kontrolle: $48 = 2 \cdot 24$, $72 = 3 \cdot 24$.
c) $35 = 5 \cdot 7$, $64 = 2^6$. Es gibt keinen gemeinsamen Primfaktor, nur 1 teilt beide. ggT $= 1$; die Zahlen heißen teilerfremd.
d) $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Gemeinsam: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. ggT $= 30$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Vielfache von 6: 6, 12, 18, 24 … Vielfache von 8: 8, 16, 24 … Das erste gemeinsame ist 24.
b) $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$. Für das kgV nimmt man jeden Primfaktor mit der höchsten vorkommenden Anzahl: $2^2 \cdot 3^2 = 36$.
c) 7 und 9 sind teilerfremd, also ist das kgV ihr Produkt: $7 \cdot 9 = 63$.
d) $20 = 2^2 \cdot 5$, $50 = 2 \cdot 5^2$. kgV $= 2^2 \cdot 5^2 = 100$. Kontrolle: $100 = 5 \cdot 20 = 2 \cdot 50$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Wahr. $4 = 2 \cdot 2$. Ist eine Zahl ein Vielfaches von 4, so ist sie auch ein Vielfaches von 2, zum Beispiel $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 14$.
b) Falsch. Gegenbeispiel: 18 ist durch 6 teilbar ($18 = 6 \cdot 3$), aber nicht durch 12. Umgekehrt stimmt es: Jede durch 12 teilbare Zahl ist durch 6 teilbar.
c) Wahr. Gerade Zahlen kann man als $2a$ und $2b$ schreiben; die Summe

$2a + 2b = 2(a + b)$ ist wieder ein Vielfaches von 2. Beispiel: $14 + 8 = 22$.
d) Falsch. Die 2 ist eine Primzahl und gerade.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Teilerpaare von 72: $1 \cdot 72$, $2 \cdot 36$, $3 \cdot 24$, $4 \cdot 18$, $6 \cdot 12$, $8 \cdot 9$.
$T_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
b) Reihenzahlen zwischen 4 und 12 müssen Teiler von 72 sein: 4, 6, 8, 9, 12. Also 4 Reihen zu 18, 6 Reihen zu 12, 8 Reihen zu 9, 9 Reihen zu 8 und 12 Reihen zu 6 Stühlen.
c) 5 ist kein Teiler von 72: $72 : 5 = 14$ Rest 2. Gleich lange Reihen sind nicht möglich.
d) $5 \cdot 14 = 70$ Stühle stehen, $72 - 70 = 2$ bleiben übrig.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Die Plattenkante muss sowohl 360 cm als auch 240 cm ohne Rest teilen. Die größte solche Zahl ist der ggT: $360 = 3 \cdot 120$, $240 = 2 \cdot 120$, und 3 und 2 sind teilerfremd. ggT $= 120$ cm.
b) In der Länge $360 : 120 = 3$ Platten, in der Breite $240 : 120 = 2$ Platten.
c) $3 \cdot 2 = 6$ Platten.
d) $6 \cdot 6{,}50 = 39{,}00$ €.
Antwort: Sechs Platten mit 1,20 m Kantenlänge für 39 €.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Linie 5 fährt nach 12, 24, 36, 48, 60 … Minuten, Linie 8 nach 15, 30, 45, 60 … Minuten. Das erste gemeinsame Vielfache ist kgV(12, 15) $= 60$ Minuten.
b) $7{:}00$ Uhr plus 60 Minuten: 8:00 Uhr.
c) Die Busse treffen sich jede volle Stunde: 8, 9, 10, 11 und 12 Uhr. Das sind 5 Treffen; Kontrolle $300 : 60 = 5$.
d) kgV(12, 15, 20): $12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$; kgV $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Alle drei fahren wieder gemeinsam um 8:00 Uhr ab.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Die Zahl der Sträuße muss jede Blumenzahl ohne Rest teilen; möglichst viele heißt ggT(48, 36, 60). $48 = 2^4 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Gemeinsam: $2^2 \cdot 3 = 12$. Höchstens 12 Sträuße.
b) Jeder Strauß: $48 : 12 = 4$ Rosen, $36 : 12 = 3$ Nelken, $60 : 12 = 5$ Tulpen.
c) $4 + 3 + 5 = 12$ Blumen pro Strauß.
d) ggT(48, 36) $= 12$. Auch ohne Tulpen wären es 12 Sträuße, dann mit je 4 Rosen und 3 Nelken.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $60 : 7 = 8$ Rest 4. 7 ist kein Teiler von 60, deshalb bleiben bei 7 Gruppen 4 Kinder übrig.

b) Gleich große Gruppen gibt es für jeden Teiler von 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Mindestens 2 Gruppen heißt: ohne die 1. Es bleiben 11 Einteilungen.
c) Für jede Gruppe braucht man einen Betreuer, also höchstens 8 Gruppen: 2, 3, 4, 5 oder 6 Gruppen (mit 30, 20, 15, 12 oder 10 Kindern).
d) Teiler von 64: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Gruppenanzahlen bis 10 (mindestens 2): 2, 4 und 8.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Rot leuchtet nach 8, 16, 24 … s, grün nach 12, 24 … s. kgV(8, 12) $= 24$ s.
b) Gemeinsames Leuchten nach 24 s und 48 s; das nächste wäre nach 72 s, also schon außerhalb der Minute. In einer Minute: 2-mal.
c) $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$. kgV $= 2^3 \cdot 3^2 = 72$ s. Alle drei leuchten nach 72 s, also nach 1 min 12 s, gemeinsam.
d) Eine Stunde hat 3600 s: $3600 : 72 = 50$. Alle drei leuchten in einer Stunde 50-mal gemeinsam.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$; $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.
b) Gemeinsame Primfaktoren mit der kleinsten Anzahl: $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. ggT $= 42$.
c) Höchstens 42 Körbe. Jeder Korb enthält $84 : 42 = 2$ Äpfel, $126 : 42 = 3$ Birnen und $42 : 42 = 1$ Orange.
d) $42 \cdot 9 = 378$ €.
e) Mit 14 Bananen muss die Korbzahl auch 14 teilen. ggT(42, 14) $= 14$. Dann gibt es 14 Körbe mit je 6 Äpfeln, 9 Birnen, 3 Orangen und 1 Banane.

Lösung zu Aufgabe 17

Ein Fach wird von jedem Kind umgeschaltet, dessen Nummer ein Teiler der Fachnummer ist.
a) Teiler von 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Fach 12 wird 6-mal umgeschaltet und ist am Ende zu (gerade Anzahl).
b) Teiler von 9: 1, 3, 9. Drei Umschaltungen: zu → offen → zu → offen. Fach 9 ist am Ende offen.
c) Eine Primzahl hat genau 2 Teiler. Fach 13 wird von Kind 1 geöffnet und von Kind 13 wieder geschlossen; es ist am Ende zu.
d) Offen sind die Fächer mit einer ungeraden Teileranzahl: 1, 4, 9 und 16. Das sind Quadratzahlen. Bei ihnen steht in einem Teilerpaar zweimal dieselbe Zahl (zum Beispiel $4 \cdot 4 = 16$), die nur einmal zählt.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Durch 5 und 9 teilbar heißt durch 45 teilbar. Zweistellige Vielfache von 45 sind 45 und 90. Quersumme von 45: $4 + 5 = 9$; von 90: $9 + 0 = 9$. Beide Zahlen erfüllen alle Bedingungen.
b) Dreistellig, kleiner als 120, Endziffer 5: 105 oder 115. Quersumme $1 + 0 + 5 = 6$ ist

durch 3 teilbar, $1 + 1 + 5 = 7$ nicht. Die Zahl ist 105.
c) kgV(2, 3, 4, 5, 6): $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$; kgV $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Probe: 60 ist durch alle fünf Zahlen teilbar.
d) Zwischen 80 und 90: 81 ($9 \cdot 9$), 82, 84, 85, 86, 88 (gerade oder durch 5), 87 ($3 \cdot 29$) fallen weg. Übrig bleiben die Primzahlen 83 und 89.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Wir gehen die Primzahlen durch und suchen Paare mit Abstand 2: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61). Kein Paar ist zum Beispiel (23, 25), weil 25 = 5 · 5.
b) 2 und 3 haben den Abstand $3 - 2 = 1$, nicht 2. Sie sind deshalb keine Primzahlzwillinge.
c) 5 und 7 sind Primzahlen, aber $9 = 3 \cdot 3$ nicht. Von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist immer eine durch 3 teilbar; deshalb ist 3, 5, 7 der einzige Primzahldrilling dieser Art.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Teiler von 6 ohne die 6 selbst: 1, 2, 3. Summe $1 + 2 + 3 = 6$. Die Zahl 6 ist vollkommen.
b) Teiler von 28 ohne 28: 1, 2, 4, 7, 14. Summe $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Auch 28 ist vollkommen.
c) Teiler von 12 ohne 12: 1, 2, 3, 4, 6. Summe 16. Da $16 > 12$, ist 12 nicht vollkommen; die Teilersumme ist größer als die Zahl. Solche Zahlen heißen abundant („überfüllt“). Vollkommene Zahlen sind sehr selten: Die nächste nach 28 ist 496.