Lernzettel - Rechnen mit natürlichen Zahlen

Klasse: Klasse 5

Die Grundrechenarten sind das Werkzeug für alle späteren Kapitel. Hier lernst du die Fachwörter, die schriftlichen Verfahren, die Rechengesetze und die Rechenreihenfolge.

Einstieg: Der Wocheneinkauf

Beim Einkaufen musst du ständig rechnen: Was kosten drei Packungen Nudeln? Reicht ein Zehn-Euro-Schein für den Einkauf? Wie viel Wechselgeld gibt es? Hinter jeder dieser Fragen steckt eine der vier Grundrechenarten. In diesem Kapitel lernst du, wie du sicher schriftlich und im Kopf rechnest, wie du geschickt Rechenvorteile nutzt und wie du mit einem Überschlag kontrollierst, ob ein Ergebnis überhaupt stimmen kann.

Die vier Grundrechenarten

Definition: Grundrechenarten

Mit natürlichen Zahlen rechnen wir auf vier Arten. Jede hat eigene Fachwörter.

- **Addition:** Summand + Summand = Summe, zum Beispiel $23 + 19 = 42$.
- **Subtraktion:** Minuend − Subtrahend = Differenz, zum Beispiel $50 - 18 = 32$.
- **Multiplikation:** Faktor · Faktor = Produkt, zum Beispiel $6 \cdot 7 = 42$.
- **Division:** Dividend : Divisor = Quotient, zum Beispiel $42 : 6 = 7$.

Merke: Umkehroperationen

Addition und Subtraktion sind Umkehroperationen, ebenso Multiplikation und Division. Daraus folgt die Probe: Aus $50 - 18 = 32$ folgt $32 + 18 = 50$. Durch 0 darf man nie teilen. Bleibt ein Rest, schreibt man $47 : 5 = 9 \text{ Rest } 2$, denn $9 \cdot 5 + 2 = 47$.

Schriftlich addieren und subtrahieren

So gehst du vor: Schriftlich addieren

1. Schreibe die Zahlen so untereinander, dass Einer unter Einer, Zehner unter Zehner usw. stehen.
2. Rechne von rechts nach links.
3. Ist eine Spaltensumme größer als 9, schreibst du die Einerstelle hin und den **Übertrag** in die nächste Spalte.

Beispiel 1: Schriftliche Addition

Berechne $3\,456 + 2\,789$.

Einer: $6 + 9 = 15$ (schreibe 5, Übertrag 1). Zehner: $5 + 8 + 1 = 14$ (4, Übertrag 1). Hunderter: $4 + 7 + 1 = 12$ (2, Übertrag 1). Tausender: $3 + 2 + 1 = 6$. Ergebnis: 6 245.

So gehst du vor: Schriftlich subtrahieren

1. Beim **Ergänzungsverfahren** fragst du: Was muss zum Subtrahenden addiert werden, damit der Minuend entsteht?
2. Ergänze Stelle für Stelle von rechts nach links, mit Übertrag.
3. Mache die Probe mit der Addition.

Beispiel 2: Schriftliche Subtraktion

Berechne $10\,000 - 4\,567$.

Man ergänzt: 7 bis 10 sind 3 (mit Übertrag), und so weiter. Das Ergebnis ist 5 433. Probe: $5\,433 + 4\,567 = 10\,000$.

Schriftlich multiplizieren und dividieren

Regel: Multiplizieren

Beim Multiplizieren zerlegt man den zweiten Faktor und addiert die Teilprodukte. Multiplikation mit 10, 100, 1000 hängt einfach Nullen an: $35 \cdot 100 = 3\,500$.

Beispiel 3: Schriftliche Multiplikation

Berechne $347 \cdot 26$.

$347 \cdot 26 = 347 \cdot 20 + 347 \cdot 6 = 6\,940 + 2\,082 = 9\,022$.

So gehst du vor: Schriftlich dividieren

1. Rechne von links nach rechts.
2. Teile die ersten Stellen, die groß genug sind, durch den Divisor.
3. Multipliziere zurück, subtrahiere und hole die nächste Ziffer herunter.
4. Schreibe auch eine 0 in den Quotienten, wenn der Divisor nicht passt.
5. Mache die Probe mit der Multiplikation.

Beispiel 4: Schriftliche Division

Berechne $8\,424 : 12$.

84 : 12 = 7 (Rest 0), dann 2 : 12 = 0, dann 24 : 12 = 2. Ergebnis: 702. Probe:

$702 \cdot 12 = 8\,424$.

Rechengesetze

Regel: Kommutativgesetz

Das Vertauschungsgesetz gilt für Addition und Multiplikation: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$. Subtraktion und Division sind *nicht* vertauschbar: $10 - 3 \neq 3 - 10$.

Regel: Assoziativgesetz

Das Verbindungsgesetz lautet $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Regel: Distributivgesetz

Das Verteilungsgesetz lautet $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Man kann es auch rückwärts nutzen.

Beispiel 5: Geschickt rechnen

Berechne $25 \cdot 37 \cdot 4$, $6 \cdot 98$ und $7 \cdot 13 + 7 \cdot 7$ mit den Rechengesetzen.

$25 \cdot 37 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 37 = 100 \cdot 37 = 3\,700$. $6 \cdot 98 = 6 \cdot (100 - 2) = 600 - 12 = 588$.
$7 \cdot 13 + 7 \cdot 7 = 7 \cdot 20 = 140$.

Beispiel 6: Im Kopf multiplizieren

Berechne $17 \cdot 12$ im Kopf.

Zerlege 12 in 10 + 2: $17 \cdot 10 = 170$ und $17 \cdot 2 = 34$. Die Summe ist 204.

Rechenregeln und Klammern

Regel: Reihenfolge

1. Zuerst die Klammern. 2. Dann **Punktrechnung vor Strichrechnung** (· und : vor + und −). 3. Sonst von links nach rechts.

Beispiel 7: Mit Klammern

Berechne $5 + 3 \cdot 8$, $(5 + 3) \cdot 8$ und $100 - 4 \cdot (12 - 7)$.

$5 + 3 \cdot 8 = 5 + 24 = 29$. $(5 + 3) \cdot 8 = 8 \cdot 8 = 64$.
$100 - 4 \cdot (12 - 7) = 100 - 4 \cdot 5 = 100 - 20 = 80$.

Beispiel 8: Term mit Klammer und Division

Berechne $36 + (48 - 12) : 6$.

Zuerst die Klammer: 48 − 12 = 36. Dann die Division 36 : 6 = 6. Zuletzt 36 + 6 = 42.

Überschlagen

So gehst du vor: Überschlagen

1. Runde die Zahlen auf eine passende Stelle.
2. Rechne mit den gerundeten Zahlen im Kopf.
3. Vergleiche mit dem genauen Ergebnis: Es muss nah am Überschlag liegen.

Beispiel 9: Plausibilitätsprüfung

Überschlage $4\,987 + 3\,012$.

$5\,000 + 3\,000 = 8\,000$. Das genaue Ergebnis 7 999 liegt sehr nah daran. Käme 12 999 heraus, wüsste man sofort: Hier stimmt etwas nicht.

Sachaufgaben lösen

So gehst du vor: Sachaufgaben

1. Lies den Text genau.
2. Schreibe die gegebenen Größen heraus.
3. Wähle die Rechnung und rechne.
4. Schreibe einen Antwortsatz.

Beispiel 10: Eintritt

26 Kinder besuchen ein Museum, der Eintritt kostet 7 € je Kind. Wie viel kostet es insgesamt?

$26 \cdot 7 = 182$. Antwort: Der Eintritt kostet insgesamt 182 €.

Beispiel 11: Busse

250 Kinder fahren mit Bussen zu je 48 Plätzen. Wie viele Busse braucht man?

$250 : 48 = 5$ Rest 10. Beim Rest muss man aufrunden, also werden 6 Busse gebraucht.

Beispiel 12: Fahrgäste

Ein Zug fährt mit 320 Fahrgästen los. Am ersten Halt steigen 85 aus und 47 ein, am zweiten 120 aus und 64 ein.

$320 - 85 + 47 - 120 + 64 = 226$. Bei Ketten aus Plus und Minus rechnet man von links nach rechts. Im Zug sitzen jetzt 226 Fahrgäste.

Beispiel 13: Mehrere Rechenarten in einer Aufgabe

Berechne $120 - 4 \cdot (9 + 6) + 18 : 3$.

Zuerst die Klammer: $9 + 6 = 15$. Dann Punkt vor Strich: $4 \cdot 15 = 60$ und $18 : 3 = 6$. Zum Schluss von links nach rechts: $120 - 60 + 6 = 66$. Wer zuerst $120 - 4$ rechnet, erhält ein falsches Ergebnis.

Beispiel 14: Division mit Rest im Alltag

Für einen Ausflug werden 137 Kinder in Busse mit je 40 Plätzen verteilt. Wie viele Busse braucht man?

$137 : 40 = 3$ Rest 17. Drei Busse reichen nicht, denn 17 Kinder bleiben übrig. Man braucht also 4 Busse. Bei Sachaufgaben entscheidet der Sinn, ob man auf- oder abrundet.

Beispiel 15: Probe mit dem Überschlag

Prüfe: $298 \cdot 41 = 12\,218$?

Überschlag: $300 \cdot 40 = 12\,000$. Das Ergebnis $12\,218$ liegt in der richtigen Größenordnung. Genaue Probe: $298 \cdot 41 = 298 \cdot 40 + 298 = 11\,920 + 298 = 12\,218$. Das Ergebnis ist richtig.

Beispiel 16: Sachaufgabe mit mehreren Schritten

Eine Klasse mit 25 Kindern kauft für eine Feier 3 Kisten Saft zu je *7{,}20\,€* und 4 Kuchen zu je *6{,}50\,€*. Wie viel muss jedes Kind bezahlen?

Saft: *3\cdot7{,}20\,€=21{,}60\,€*. Kuchen: *4\cdot6{,}50\,€=26{,}00\,€*. Zusammen: *47{,}60\,€*. Pro Kind: *47{,}60\,€:25=1{,}904\,€*, also gerundet *1{,}90\,€*. Weil das Geld ausreichen soll, runden die Kinder auf *2{,}00\,€* auf. Hier sieht man: Bei Geld entscheidet die Situation, wie gerundet wird.

Typische Fehler

(1) Punkt vor Strich vergessen: $3 + 4 \cdot 5$ ist 23 und nicht 35. (2) Beim schriftlichen Subtrahieren die kleinere von der größeren Ziffer abziehen, statt zu entbündeln. (3) Bei der Division die Null im Ergebnis vergessen: $8\,424 : 12 = 702$ und nicht 72. (4) Das Kommutativgesetz bei Minus und Geteilt anwenden: $10 - 4$ ist nicht $4 - 10$. (5) Bei Sachaufgaben die Antwort ohne Einheit und Satz aufschreiben.

Wusstest du?

Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß soll als neunjähriger Schüler in Braunschweig die Zahlen von 1 bis 100 in wenigen Minuten addiert haben. Er bildete Paare: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$ und so weiter. Es gibt 50 solche Paare, also ist die Summe $50 \cdot 101 = 5\,050$. Das ist ein berühmtes Beispiel für geschicktes Rechnen mit Rechengesetzen.

Beispiel 17: Rechengeschichte aufschreiben

Anna kauft 3 Hefte zu je *1{,}20\,€* und einen Block für *2{,}80\,€*. Sie zahlt mit *10\,€*. Schreibe die Rechnung in einem Term auf.

Term: $10 - (3 \cdot 1{,}20 + 2{,}80)$. Zuerst die Klammer, darin Punkt vor Strich: $3 \cdot 1{,}20 = 3{,}60$, dann $3{,}60 + 2{,}80 = 6{,}40$. Zum Schluss $10 - 6{,}40 = 3{,}60$. Anna bekommt *3{,}60\,€* zurück.

Rechnen im Kopf und auf dem Papier

Im Alltag rechnest du oft im Kopf: beim Bezahlen, beim Teilen von Süßigkeiten oder beim Planen der Zeit. Das schriftliche Rechnen brauchst du, wenn die Zahlen groß sind oder wenn du dein Ergebnis genau festhalten willst. Beide Wege ergänzen sich. Ein guter Rechner überschlägt zuerst im Kopf, rechnet dann schriftlich genau und vergleicht beide Ergebnisse. So fallen Fehler sofort auf, zum Beispiel ein vergessener Übertrag oder eine falsch gesetzte Null.

Die vier Grundrechenarten gehören paarweise zusammen. Wer addiert, kann mit der Subtraktion kontrollieren. Wer multipliziert, kann mit der Division prüfen. Diese Probe kostet wenig Zeit und gibt viel Sicherheit. Gewöhne dir an, bei jeder wichtigen Rechnung eine Probe zu machen.

So gehst du vor: Schriftlich dividieren

Zuerst schaust du, wie viele Stellen des Dividenden du für die erste Teilrechnung brauchst, bis die Zahl mindestens so groß ist wie der Teiler. Dann fragst du, wie oft der Teiler hineinpasst, schreibst die Antwort oben hin, multiplizierst zurück und subtrahierst. Danach holst du die nächste Ziffer herunter und wiederholst das Verfahren. Bleibt am Ende ein Rest, schreibst du ihn hinter das Ergebnis. Wenn du eine Ziffer herunterholst und der Teiler nicht hineinpasst, schreibst du eine Null in das Ergebnis.

Beispiel 18: Dividieren mit Rest im Sachzusammenhang

Eine Lehrerin hat 150 Bleistifte und möchte sie gleichmäßig an 24 Kinder verteilen. Wie viele bekommt jedes Kind, und wie viele bleiben übrig?

Wir teilen 150 durch 24. In 150 passt die Zahl 24 sechsmal hinein, denn sechs mal 24 ergibt 144. Dann bleiben 150 minus 144, also 6 Stifte übrig. Jedes Kind bekommt

sechs Bleistifte, und sechs Stifte bleiben übrig. Die Probe lautet: sechs mal 24 plus 6 ergibt 150. Die Antwort muss immer als Satz formuliert werden: Jedes Kind erhält sechs Bleistifte, sechs Stifte bleiben übrig.

Beispiel 19: Geschickt rechnen mit dem Verteilungsgesetz

Wie rechnest du 7 mal 98 geschickt im Kopf?

Die Zahl 98 liegt knapp unter 100. Deshalb rechnest du erst 7 mal 100, das sind 700, und ziehst dann 7 mal 2, also 14, ab. Es bleiben 686. Dieses Vorgehen nennt man Rechenvorteil. Mit solchen Tricks sparst du Zeit und machst weniger Fehler, weil die Zwischenschritte einfach sind.

Überschlag: Warum er so nützlich ist

Ein Überschlag bedeutet, mit gerundeten Zahlen zu rechnen. Du rundest so, dass die Rechnung im Kopf leicht ist, meistens auf volle Zehner, Hunderter oder Tausender. Das Ergebnis ist nicht genau, aber es zeigt dir die Größenordnung. Wenn dein genaues Ergebnis ganz anders aussieht als der Überschlag, hast du dich verrechnet. Besonders bei der Multiplikation und Division ist das hilfreich, weil man dort leicht eine Null zu viel oder zu wenig schreibt.

Sachaufgaben sicher lösen

Bei Sachaufgaben liest du den Text zuerst ganz und überlegst, was gefragt ist. Dann suchst du die wichtigen Zahlen heraus und stellst eine Rechnung auf. Erst jetzt rechnest du. Zum Schluss formulierst du einen Antwortsatz mit der richtigen Einheit. Prüfe, ob das Ergebnis zur Situation passt: Ein Bus mit negativen Fahrgästen oder ein Kind, das zwei Komma fünf Bleistifte bekommt, kann nicht stimmen. Bei Aufgaben mit Rest entscheidet der Sinn, ob man auf- oder abrundet: Für Fahrgäste braucht man volle Busse, also rundet man auf.

Wusstest du? Das Einmaleins im Altertum

Schon vor mehr als viertausend Jahren schrieben die Babylonier Malrechnungen in Tontafeln. Sie hatten Tabellen für das Einmaleins, ähnlich wie du es in der Grundschule gelernt hast. Später erfanden Rechenmeister im Mittelalter Verfahren, mit denen auch Kaufleute große Zahlen schriftlich multiplizieren konnten. Unsere heutigen Verfahren zum schriftlichen Rechnen gehen auf diese Zeit zurück und wurden über Jahrhunderte verfeinert. Ohne sie wären Handel, Bauwesen und Wissenschaft kaum möglich gewesen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Addition und Subtraktion sowie Multiplikation und Division sind Umkehroperationen; damit kann man jedes Ergebnis durch eine Probe prüfen.

- Beim schriftlichen Addieren und Subtrahieren stehen gleiche Stellenwerte untereinander; Überträge und Entbündeln sorgfältig notieren.
- Beim schriftlichen Multiplizieren rechnet man Teilergebnisse für Zehner und Einer und addiert sie; bei der Division arbeitet man schrittweise von links nach rechts.
- Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz machen das Kopfrechnen leichter, zum Beispiel $25 \cdot 4 \cdot 17 = 100 \cdot 17$.
- Rechenreihenfolge: erst Klammern, dann Punktrechnung (Mal, Geteilt), dann Strichrechnung (Plus, Minus), sonst von links nach rechts.
- Ein Überschlag mit gerundeten Zahlen zeigt, ob ein Ergebnis in der richtigen Größenordnung liegt.
- Bei Sachaufgaben: Frage lesen, Rechnung aufschreiben, Ergebnis mit Einheit und Antwortsatz notieren, bei Rest den Sinn prüfen.

Achtung

Typisch ist, Punkt vor Strich zu vergessen: $3 + 4 \cdot 5$ ist 23, nicht 35. Beim Dividieren geht oft die 0 im Quotienten verloren: $8\,424 : 12$ ergibt 702, nicht 72. Beim Überschlagen wird manchmal zu grob gerundet.

Hinweis

Schreibe beim Rechnen jeden Schritt untereinander auf. So findest du Fehler schneller, und deine Lehrkraft kann deinen Rechenweg nachvollziehen.

Ottos Tipp

Mach nach jeder schriftlichen Rechnung die Probe mit der Umkehraufgabe. Das dauert nur eine halbe Minute und spart viele Punkte in der Klassenarbeit!