Lernzettel - Natürliche Zahlen und Stellenwertsystem

Klasse: Klasse 5

Mit Zahlen zählen wir Schüler, Zuschauer oder Einwohner. In diesem Kapitel lernst du, wie unser Zahlensystem aufgebaut ist und wie man Zahlen liest, vergleicht und rundet.

Einstieg: Zahlen im Stadion

Am Samstag kommen $48\,732$ Fans ins Stadion, im Radio hört man „fast fünfzigtausend“. Wie kommt der Sprecher darauf? Er rundet die Zahl. Und wenn der Stadionsprecher eine Zahl vorliest, muss er wissen, welche Ziffer wie viel wert ist. In diesem Kapitel lernst du, große Zahlen zu lesen, zu schreiben, zu ordnen und sinnvoll zu runden.

Was sind natürliche Zahlen?

Definition: natürliche Zahlen

Die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... heißen **natürliche Zahlen**. Man schreibt $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Jede natürliche Zahl hat einen **Nachfolger** (die nächstgrößere Zahl) und, außer der 0, einen **Vorgänger** (die nächstkleinere Zahl).

Merke

Es gibt keine größte natürliche Zahl, denn zu jeder Zahl kann man 1 addieren.

Beispiel 1: Nachfolger und Vorgänger

Gib Nachfolger und Vorgänger von 399 und von 1000 an.

Der Nachfolger von 399 ist 400, der Vorgänger von 399 ist 398. Der Nachfolger von 1000 ist 1001, der Vorgänger ist 999.

Das Stellenwertsystem

Definition: Stellenwertsystem

Wir schreiben alle Zahlen mit den zehn Ziffern 0 bis 9. Welchen Wert eine Ziffer hat, hängt von ihrer **Stelle** ab. Von rechts nach links stehen Einer (E), Zehner (Z), Hunderter (H), Tausender (T), Zehntausender (ZT), Hunderttausender (HT) und Millionen (M).

Merke

Jede Stelle ist zehnmal so viel wert wie die Stelle rechts daneben. Die Ziffer 0 hält eine Stelle frei und ist deshalb wichtig.

M	HT	ZT	T	H	Z	E
3	0	7	4	0	5	9

Die Zahl in der Tabelle ist 3 074 059 (drei Millionen vierundsiebzigtausendneunundfünfzig). Ohne die Nullen würde daraus die ganz andere Zahl 37 459. Große Zahlen gliedert man von rechts in Dreiergruppen.

Regel: Summenschreibweise

Den Wert jeder Ziffer zeigt die Summenschreibweise:
$4305 = 4 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$. Mit Zehnerpotenzen:
$4305 = 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5$. Die Potenz 10^3 bedeutet $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

Beispiel 2: Zahl aus der Tafel lesen

Wie liest man 12 500 000?

1000 Tausender sind eine Million, 1000 Millionen eine Milliarde. Eine Million hat sechs Nullen, eine Milliarde neun. 12 500 000 liest man „zwölf Millionen fünfhunderttausend“.

Der Zahlenstrahl

Auf dem Zahlenstrahl liegt die 0 links, die Zahlen wachsen nach rechts. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Strichen ist gleich groß.

So gehst du vor: Zahlenstrahl ablesen

1. Bestimme die **Skalierung**: Wie viele gleiche Abschnitte liegen zwischen zwei beschrifteten Zahlen?
2. Berechne die Länge eines Abschnitts (zum Beispiel 100 : 10 = 10).
3. Zähle vom bekannten Strich aus Abschnitt für Abschnitt weiter.

Merke: Vergleichen am Zahlenstrahl

Eine Zahl ist **kleiner**, wenn sie weiter links liegt. Man vergleicht mit < (kleiner als), > (größer als) und = (gleich): 47, $1000 > 999$.

Zahlen vergleichen und ordnen

Regel

Hat eine Zahl mehr Stellen, ist sie größer (ohne führende Nullen). Bei gleich vielen Stellen vergleicht man von links nach rechts, bis sich zwei Ziffern unterscheiden.

Beispiel 3: Zwei Zahlen vergleichen

Vergleiche 48 731 und 48 713.

Die ersten drei Ziffern sind gleich, dann gilt 3 > 1. Also ist 48 731 > 48 713. Zum Ordnen schreibt man a.

Beispiel 4: Ziffernkarten

Aus den Ziffernkarten 4, 0 und 7 sollen die größte und die kleinste dreistellige Zahl gelegt werden.

Für die größte Zahl kommt die größte Ziffer nach vorne: 740. Bei der kleinsten dreistelligen Zahl darf die 0 nicht vorne stehen, also beginnt man mit der 4: 407.

Runden

Definition: Runden

Beim Runden ersetzt man eine Zahl durch einen ungefähren Wert. Man legt die **Rundungsstelle** fest und schaut auf die Ziffer direkt rechts davon.

Regel: Rundungsregel

Steht rechts der Rundungsstelle eine 0, 1, 2, 3 oder 4, wird **abgerundet**. Bei 5, 6, 7, 8 oder 9 wird **aufgerundet**. Alle Stellen rechts der Rundungsstelle werden zu 0.

So gehst du vor: Runden

1. Rundungsstelle festlegen (zum Beispiel Tausender).
2. Ziffer rechts davon ansehen.
3. Bei 0 bis 4 abrunden, bei 5 bis 9 aufrunden.
4. Die Stellen rechts der Rundungsstelle durch Nullen ersetzen.

Beispiel 5: Auf Tausender runden

Runde 38 472 und 38 572 auf Tausender.

Bei 38 472 steht rechts der Tausenderstelle eine 4, also abrunden: 38 000. Bei 38 572 steht dort eine 5, also aufrunden: 39 000.

Beispiel 6: Übertrag beim Runden

Runde 9 960 auf Hunderter.

Rechts der Hunderterstelle steht 6, also wird aufgerundet: 9 900 + 100 = 10 000. Der Übertrag verändert mehrere Stellen.

Beispiel 7: Zehner in einer Zahl

Wie viele Zehner stecken in 4 560?

Man teilt durch 10: 4 560 : 10 = 456 Zehner. Dieselbe Zahl besteht aus 45 Hundertern und 60 Einern, also 4 560 = 45 · 100 + 60.

Das Zweiersystem

Computer rechnen im **Zweiersystem**. Es kennt nur die Ziffern 0 und 1, und die Stellenwerte sind Potenzen von 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Beispiel 8: Binärzahlen

Welche Zahl ist 1101 im Zweiersystem? Wie schreibt man 22 im Zweiersystem?

$1101 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 13$. Für 22 zerlegt man $22 = 16 + 4 + 2$, also 10110.

Beispiel 9: Zahl in der Stellenwerttafel

Trage $703\,046$ in eine Stellenwerttafel ein und lies sie vor.

HT 7, ZT 0, T 3, H 0, Z 4, E 6. Die Nullen halten die leeren Stellen frei. Gelesen: siebenhundertdreitausendsechsundvierzig. Wer die Null vergisst, schreibt $7\,346$ statt $703\,046$. Das ist eine völlig andere Zahl.

Beispiel 10: Rundungen im Alltag

Ein Zug hat $1\,264$ Fahrgäste. Runde auf Zehner, Hunderter und Tausender.

Zehner: Die Einerziffer ist 4, also abrunden: $1\,260$. Hunderter: Die Zehnerziffer ist 6, also aufrunden: $1\,300$. Tausender: Die Hunderterziffer ist 2, also abrunden: $1\,000$. Je gröber gerundet wird, desto größer wird der Fehler.

Beispiel 11: Größte und kleinste Zahl

Lege mit den Ziffern $2, 0, 9, 4$ die größte und die kleinste vierstellige Zahl.

Größte Zahl: Die größte Ziffer kommt nach vorn, dann die nächstgrößere usw.: $9\,420$. Kleinste Zahl: Vorn darf keine 0 stehen, also beginnt man mit der kleinsten Ziffer ungleich 0, das ist die 2; danach folgt die 0: $2\,049$. Differenz: $9\,420 - 2\,049 = 7\,371$.

Typische Fehler

(1) Beim Aufschreiben die Null vergessen: $30\,508$ ist nicht $3\,58$. (2) Zahlen nur nach den ersten Ziffern vergleichen, ohne die Stellenzahl zu beachten: $9\,999$, obwohl 9 größer als 1 ist. (3) Beim Runden die falsche Ziffer ansehen: Es zählt immer nur die Ziffer rechts neben der Rundungsstelle. (4) Bei $99\,500$ auf Tausender den Übertrag vergessen: Das Ergebnis ist $100\,000$.

Wusstest du?

Unsere Ziffern 0 bis 9 stammen aus Indien und kamen über die arabische Welt nach Europa. Der Rechenmeister Adam Ries erklärte um das Jahr 1520 in Deutschland, wie man damit rechnet. Sein Name lebt in der Redensart „nach Adam Riese“ weiter. Die römischen Zahlen kannten noch keine Null; erst das Stellenwertsystem machte das schriftliche Rechnen einfach.

Beispiel 12: Nachbarzahlen und Zahlenstrahl

Zwischen welchen Tausendern liegt die Zahl $48\,732$, und welchem Tausender liegt sie näher?

Die Zahl liegt zwischen $48\,000$ und $49\,000$. Der Abstand zu $48\,000$ ist 732, der Abstand zu $49\,000$ ist 268. Sie liegt also näher bei $49\,000$; darum wird auf $49\,000$ gerundet.

Warum brauchen wir große Zahlen?

Im Alltag begegnen dir große Zahlen ständig. Eine Schule hat vielleicht tausend Schülerinnen und Schüler, eine Stadt hunderttausend Einwohner, ein Land viele Millionen. Wer die Namen der Stellen kennt, kann solche Zahlen sicher lesen, aufschreiben und miteinander vergleichen. Das Stellenwertsystem ist dabei das wichtigste Werkzeug: Jede Ziffer hat einen Wert, der von ihrer Stelle abhängt. Die gleiche Ziffer Fünf bedeutet fünf Einer, fünfzig Zehner oder fünfhundert Hunderter, je nachdem, wo sie steht.

Beim Lesen großer Zahlen hilft es, sie von rechts in Dreiergruppen zu gliedern. So wird aus einer langen Ziffernfolge eine Zahl, die man in Worten sprechen kann: zuerst die Millionen, dann die Tausender, dann der Rest. Beim Schreiben achtest du darauf, dass jede Gruppe wieder genau drei Ziffern hat, auch wenn dort Nullen stehen. Eine fehlende Gruppe ersetzt du durch drei Nullen, sonst entsteht eine viel kleinere Zahl.

So gehst du vor: Große Zahlen lesen

Zuerst gliederst du die Zahl von rechts in Dreiergruppen. Dann liest du die linke Gruppe mit ihrem Namen, zum Beispiel Millionen oder Tausend, danach die nächste Gruppe, und so weiter bis zu den Einern. Nullgruppen werden nicht gesprochen, aber beim Schreiben unbedingt beachtet. Zur Kontrolle sprichst du die Zahl noch einmal langsam und schreibst sie nach dem Diktat deiner Partnerin oder deines Partners auf.

Beispiel 13: Eine Zahl aus Worten aufschreiben

Schreibe als Ziffern: vier Millionen dreihundertzwanzigtausend und sieben.

Wir gehen Gruppe für Gruppe vor. Vier Millionen ergibt die Gruppe 4 vor den Tausendern. Dann folgt dreihundertzwanzigtausend, also die Gruppe 320 bei den Tausendern. Danach kommen die Einer: sieben, geschrieben als 007, weil keine Hunderter und keine Zehner genannt werden. Zusammengesetzt entsteht die Zahl 4 320 007. Zur Kontrolle liest du sie rückwärts in Worten vor und prüfst, ob sie zum Text passt.

Beispiel 14: Zahlen am Zahlenstrahl vergleichen

Warum liegt die Zahl 9 870 links von der Zahl 10 230?

Am Zahlenstrahl liegen größere Zahlen immer weiter rechts. Die Zahl 9 870 hat vier Stellen, die Zahl 10 230 hat fünf Stellen. Eine Zahl mit mehr Stellen ist immer größer, wenn keine führenden Nullen vorkommen. Deshalb ist 10 230 größer und liegt rechts. Haben zwei Zahlen gleich viele Stellen, vergleichst du von links nach rechts die Ziffern: Die erste Stelle mit einem Unterschied entscheidet.

Genauigkeit und Rundung im Alltag

Meistens müssen wir Zahlen nicht ganz genau angeben. Wenn eine Zeitung schreibt, dass fast fünfzigtausend Fans im Stadion waren, ist das eine gerundete Angabe. Sie ist übersichtlicher und leichter zu merken. Dabei muss man überlegen, wie genau die Angabe sein soll: Ein Bäcker rundet auf Zehner, eine Stadt rundet Einwohnerzahlen auf Hunderter oder Tausender. Je größer die Rundungsstelle, desto größer kann der Fehler werden.

Wichtig ist die Rundungsregel: Man schaut auf die Ziffer direkt rechts von der Rundungsstelle. Ist sie eine Null, Eins, Zwei, Drei oder Vier, bleibt die Rundungsstelle gleich und alles rechts davon wird zu Nullen. Ist sie eine Fünf, Sechs, Sieben, Acht oder Neun, wird die Rundungsstelle um eins erhöht. Steht dort eine Neun, entsteht ein Übertrag, der sich nach links fortsetzen kann. So wird aus neunundneunzigtausendfünfhundert beim Runden auf Tausender die Zahl einhunderttausend.

Wusstest du? Wie groß ist eine Milliarde?

Eine Milliarde hat neun Nullen. Wer jede Sekunde eine Zahl laut zählt, braucht für eine Million etwa zwölf Tage, für eine Milliarde aber mehr als dreißig Jahre. Deshalb ist es so wichtig, Größenordnungen zu verstehen: Der Unterschied zwischen einer Million und einer Milliarde ist gewaltig, auch wenn beide Wörter ähnlich klingen. In der Wissenschaft schreiben Fachleute sehr große Zahlen deshalb mit Zehnerpotenzen auf. Das lernst du in den höheren Klassen. Bis dahin helfen dir die Stellenwerttafel und die Dreiergruppen, auch riesige Zahlen sicher zu beherrschen.

Zahlen in anderen Kulturen

Nicht alle Völker haben mit dem Stellenwertsystem gerechnet. Die Römer schrieben Zahlen mit Buchstaben, bei denen die Stelle keine Rolle spielt. Das machte Rechnen mühsam, deshalb benutzten sie ein Rechenbrett mit Steinchen, den Abakus. Die Maya in Mittelamerika rechneten dagegen schon früh mit einer Null und einem Stellenwertsystem zur Basis zwanzig. Und die Babylonier nutzten die Basis sechzig, von der wir bis heute die Einteilung von Stunden und Minuten haben. Unser Zehnersystem ist also eine Erfindung unter vielen, aber eine sehr praktische, weil wir zehn Finger haben.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Natürliche Zahlen sind $0, 1, 2, 3, \ldots$; jede hat genau einen Nachfolger, und außer der 0 auch einen Vorgänger.
- Im Stellenwertsystem ist jede Stelle das Zehnfache der rechten Nachbarstelle: E, Z, H, T, ZT, HT, M.
- Die Stellenwerttafel hilft beim Lesen und Schreiben; leere Stellen füllt man immer mit einer 0.
- Zahlen vergleicht man zuerst nach der Stellenzahl, dann von links nach rechts Ziffer für Ziffer.
- Am Zahlenstrahl liegen kleinere Zahlen links; vor dem Ablesen immer die Schrittweite bestimmen.
- Runden: Man betrachtet nur die Ziffer rechts neben der Rundungsstelle; 0 bis 4 abrunden, 5 bis 9 aufrunden, Übertrag beachten.
- Im Zweiersystem gibt es nur 0 und 1; die Stellenwerte sind $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Achtung

Viele schreiben große Zahlen nach dem Hören falsch, etwa „dreitausendvierzig“ als 3 400 statt 3 040. Beim Runden entscheidet nicht die Ziffer an der Rundungsstelle, sondern die Ziffer rechts davon. Beim Vergleichen gilt: mehr Stellen heißt größer.

Hinweis

Wer sicher mit der Stellenwerttafel arbeitet, kann Zahlen lesen, schreiben, vergleichen, runden und später auch schriftlich rechnen. Übe regelmäßig kurze Aufgaben und kontrolliere dich mit den Lösungen.

Ottos Tipp

Zeichne dir eine Stellenwerttafel, bevor du eine große Zahl liest oder schreibst. Setze für jede Lücke eine 0 ein, dann verrutscht keine Ziffer!