Lernzettel - Körper, Netze und Volumen

Klasse: Klasse 5

Körper sind dreidimensionale Gegenstände. In diesem Kapitel lernst du Quader und Würfel kennen, ihre Netze, die Oberfläche und das Volumen.

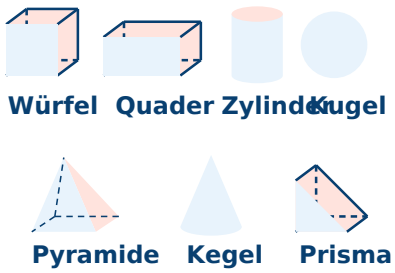
Einstieg: Das große Paket

Du packst ein Geschenk ein. Wie viel Papier brauchst du für die Schachtel? Wie viel passt hinein? Und wie sieht die Schachtel aus, bevor man sie zusammenklebt? Die drei Fragen führen zu den drei Themen dieses Kapitels: Oberfläche, Volumen und Netz. Du lernst, Quader und Würfel zu beschreiben, ihre Netze zu erkennen und Oberfläche und Rauminhalt zu berechnen.

Körper im Alltag

Definition: Körper

Eine Schachtel hat die Form eines **Quaders**, ein Spielwürfel die eines **Würfels**, eine Konservendose die eines **Zylinders**, ein Ball die einer **Kugel**, eine Eistüte die eines **Kegels** und die Pyramiden in Ägypten die einer **Pyramide**.



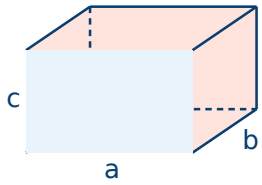
Eigenschaften von Quader und Würfel

Definition: Quader

Ein **Quader** wird von sechs Rechtecken begrenzt. Er hat **8 Ecken**, **12 Kanten** und **6 Flächen**. Gegenüberliegende Flächen sind gleich groß und parallel. Die Kantenlängen heißen Länge a, Breite b und Höhe c.

Definition: Würfel

Ein **Würfel** ist ein Quader mit lauter gleich langen Kanten. Seine sechs Flächen sind Quadrate. Er hat ebenfalls 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen.



Regel: Kantenlängen

Die Summe aller Kantenlängen eines Quaders ist $4 \cdot (a + b + c)$, beim Würfel $12 \cdot a$.

Beispiel 1: Drahtmodell

Ein Quader hat $a = 5\ \text{cm}$, $b = 3\ \text{cm}$ und $c = 2\ \text{cm}$. Wie viel Draht braucht man für alle Kanten?

$4 \cdot (5 + 3 + 2) = 4 \cdot 10 = 40\ \text{cm}$.

Netze

Definition: Netz

Schneidet man eine Schachtel entlang einiger Kanten auf und klappt sie flach auseinander, erhält man ein **Netz**. Das Netz eines Quaders besteht aus sechs Rechtecken, das eines Würfels aus sechs gleich großen Quadraten.

Merke: Würfelnetze

Es gibt **11 verschiedene Würfelnetze**. Nicht jede Anordnung von sechs Quadraten ist eines: Sechs Quadrate in einer Reihe ergeben keinen Würfel, weil sich Flächen überlappen würden.

So gehst du vor: Würfelnetz prüfen

1. Falte das Netz in Gedanken.
2. Jede Fläche darf nur einmal vorkommen.
3. Wenn sich zwei Flächen beim Falten überdecken, ist es kein Würfelnetz.

Hinweis

Mit einer Reihe aus vier Quadraten und je einem Quadrat ober- und unterhalb der

Reihe (an beliebigen Stellen) entsteht immer ein Würfelnetz.

Oberfläche

Definition: Oberfläche

Die **Oberfläche** O eines Körpers ist die Summe der Flächeninhalte aller seiner Begrenzungsflächen, also die Fläche seines Netzes.

Regel: Oberfläche

Quader: $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$. Würfel: $O = 6 \cdot a^2$.

Beispiel 2: Oberflächen berechnen

Berechne die Oberfläche eines Würfels mit $a = 3\ \text{cm}$ und eines Quaders $5\ \text{cm} \times 3\ \text{cm} \times 2\ \text{cm}$.

Würfel: $O = 6 \cdot 9 = 54\ \text{cm}^2$. Quader: $O = 2 \cdot (15 + 10 + 6) = 2 \cdot 31 = 62\ \text{cm}^2$.

Beispiel 3: Schuhkarton

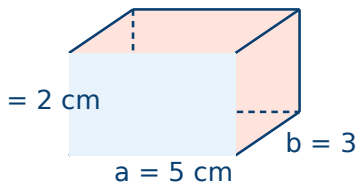
Ein Schuhkarton ist 30 cm lang, 20 cm breit und 12 cm hoch. Wie viel Pappe braucht man?

Deckel und Boden: je $30 \cdot 20 = 600\ \text{cm}^2$. Seiten: $2 \cdot (30 \cdot 12) + 2 \cdot (20 \cdot 12) = 720 + 480 = 1\,200\ \text{cm}^2$. Zusammen: $O = 600 + 600 + 1\,200 = 2\,400\ \text{cm}^2$.

Volumen

Definition: Volumen

Das **Volumen** V gibt an, wie viel Raum ein Körper einnimmt. Man legt ihn mit Einheitswürfeln aus, zum Beispiel mit Würfeln der Kantenlänge 1 cm (Volumen 1 cm³).



Regel: Volumen

Quader: $V = a \cdot b \cdot c$. Würfel: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$. Man berechnet zuerst die Grundfläche

$a \cdot b$ und multipliziert dann mit der Höhe c.

Beispiel 4: Volumen berechnen

Berechne das Volumen eines Quaders $10\ \text{cm} \times 4\ \text{cm} \times 3\ \text{cm}$ und eines Würfels mit $a = 4\ \text{cm}$.

$V = 10 \cdot 4 \cdot 3 = 120\ \text{cm}^3$ und $V = 4^3 = 64\ \text{cm}^3$.

Beispiel 5: Zimmerluft

Ein Zimmer ist 5 m lang, 4 m breit und 2,5 m hoch. Wie viel Luft enthält es?

$V = 5 \cdot 4 \cdot 2{,}5 = 50\ \text{m}^3$, das sind 50 000 Liter.

Volumeneinheiten umrechnen

Merke: Volumeneinheiten

Zwischen benachbarten Einheiten liegt der Faktor **1 000**: $1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$ und $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{dm}^3$. Für Flüssigkeiten: $1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3$, $1\ \text{ml} = 1\ \text{cm}^3$, $1\ \text{l} = 1\,000\ \text{ml}$ und $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{l}$.

Beispiel 6: Umrechnen

Rechne um: 2 500 ml in l, 4,5 l in cm³, 3 m³ in l.

$2\,500\ \text{ml} = 2{,}5\ \text{l}$, $4{,}5\ \text{l} = 4\,500\ \text{cm}^3$, $3\ \text{m}^3 = 3\,000\ \text{l}$.

Fehlende Größen berechnen

Regel: Höhe aus dem Volumen

Ist das Volumen und die Grundfläche bekannt, gilt $c = V : (a \cdot b)$.

Beispiel 7: Höhe bestimmen

Ein Quader hat $V = 240\ \text{cm}^3$ und die Grundfläche $5 \cdot 6 = 30\ \text{cm}^2$. Wie hoch ist er? Wie lang ist die Kante eines Würfels mit $V = 125\ \text{cm}^3$?

$c = 240 : 30 = 8\ \text{cm}$. Beim Würfel sucht man die Zahl, die dreimal mit sich selbst multipliziert 125 ergibt: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, also $a = 5\ \text{cm}$.

Beispiel 8: Milchtüte

Eine Milchtüte fasst 1 Liter und hat eine Grundfläche von 7 cm × 7 cm. Wie

hoch ist sie ungefähr?

1 l sind 1 000 cm³. $1\,000 : 49 \approx 20{,}4\,\text{cm}$.

Beispiel 9: Volumen und Liter

Ein Wassertank ist $1{,}5\,\text{m}$ lang, $80\,\text{cm}$ breit und $1\,\text{m}$ hoch. Wie viele Liter fasst er?

Zuerst alle Längen in dieselbe Einheit: $15\,\text{dm}$, $8\,\text{dm}$, $10\,\text{dm}$. Volumen: $15 \cdot 8 \cdot 10 = 1200\,\text{dm}^3$. Weil $1\,\text{dm}^3 = 1\,\text{l}$ ist, fasst der Tank $1\,200$ Liter. Zur Kontrolle: $1{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 1 = 1{,}2\,\text{m}^3 = 1200\,\text{l}$.

Beispiel 10: Ist das ein Würfelnetz?

Fünf Quadrate liegen in einer Reihe, ein sechstes Quadrat liegt über dem zweiten. Ist das ein Würfelnetz?

Vier Quadrate in einer Reihe bilden beim Falten einen Ring: Vorderseite, rechte Seite, Rückseite, linke Seite. Das fünfte Quadrat würde wieder auf die Vorderseite fallen. Deshalb ist die Figur kein Würfelnetz. Man prüft mit dem Gegenüber-Test: Jede Fläche braucht genau eine gegenüberliegende Fläche, und keine zwei Quadrate dürfen beim Falten übereinander liegen.

Beispiel 11: Oberfläche im Alltag

Ein Kuchenkarton ohne Deckel ist $30\,\text{cm}$ lang, $20\,\text{cm}$ breit und $10\,\text{cm}$ hoch. Wie viel Pappe braucht man?

Ohne Deckel fehlt eine Fläche. Boden: $30 \cdot 20 = 600\,\text{cm}^2$. Lange Seitenwände: $2 \cdot 30 \cdot 10 = 600\,\text{cm}^2$. Kurze Seitenwände: $2 \cdot 20 \cdot 10 = 400\,\text{cm}^2$. Zusammen $1\,600\,\text{cm}^2$.

Beispiel 12: Höhe aus dem Volumen

Eine Kiste hat die Grundfläche $50\,\text{cm} \times 40\,\text{cm}$ und fasst 80 Liter. Wie hoch ist sie?

$80\,\text{l} = 80\,\text{dm}^3 = 80\,000\,\text{cm}^3$. Die Grundfläche beträgt $50 \cdot 40 = 2\,000\,\text{cm}^2$. Also ist die Höhe $h = 80\,000 : 2\,000 = 40\,\text{cm}$. Probe: $50 \cdot 40 \cdot 40 = 80\,000\,\text{cm}^3$. Das stimmt. Beim Umkehren der Volumenformel teilt man das Volumen durch die Grundfläche.

Typische Fehler

(1) Volumen und Oberfläche verwechseln: Das Volumen hat die Einheit cm^3, die Oberfläche cm^2. (2) Beim Umrechnen von Volumeneinheiten mit 10 oder 100 statt mit 1000 rechnen. (3) Bei der Oberfläche nur drei Flächen zählen: Ein Quader hat sechs Flächen, je zwei gleiche. (4) Längen in verschiedenen Einheiten multiplizieren, ohne sie anzugleichen. (5) a^3 mit $3a$ verwechseln: $5^3 = 125$, aber $3 \cdot 5 = 15$.

Wusstest du?

Ein Liter ist so festgelegt, dass er genau einem Würfel mit $10\,\text{cm}$ Kantenlänge entspricht, also $1\,\text{dm}^3$. Ein Güterwagen der Bahn fasst etwa $100\,\text{m}^3$, das sind $100\,000$ Liter. Das größte Aquarium der Welt in Georgia (USA) fasst mehr als 24 Millionen Liter. Und der Würfelzauber des Spielwürfels: Gegenüberliegende Augenzahlen ergeben immer 7.

So gehst du vor: Aufgaben zu Quader und Würfel

1. Skizziere den Körper und trage die Längen a, b, c ein.
2. Entscheide: Geht es um Rauminhalt (Volumen, cm^3), um Verpackung oder Farbe (Oberfläche, cm^2) oder um Draht und Kanten (Kantensumme, cm)?
3. Rechne alle Längen in dieselbe Einheit um.
4. Wähle die passende Formel und setze ein.
5. Schreibe das Ergebnis mit Einheit auf; bei Liter denke an $1\,\text{dm}^3 = 1\,\text{l}$.

Beispiel 13: Vergleich von Volumen und Oberfläche

Würfel A hat die Kantenlänge $3\,\text{cm}$, Quader B misst $9\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$. Welcher Körper hat mehr Volumen, welcher mehr Oberfläche?

Volumen A: $27\,\text{cm}^3$; Volumen B: $9 \cdot 3 \cdot 1 = 27\,\text{cm}^3$. Beide haben dasselbe Volumen. Oberfläche A: $6 \cdot 9 = 54\,\text{cm}^2$; Oberfläche B: $2 \cdot (27 + 9 + 3) = 78\,\text{cm}^2$. Gleiches Volumen bedeutet nicht gleiche Oberfläche; der flache Quader braucht mehr Verpackung.

Körper in der Umwelt

Quader und Würfel sind überall: Schuhkartons, Kühlschränke, Würfelzucker, Zimmer und Container. Du erkennst sie an ihren sechs Flächen, zwölf Kanten und acht Ecken. Beim Würfel sind alle Kanten gleich lang, beim Quader sind es jeweils vier parallele Kanten mit gleicher Länge. Ein Körper hat drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe. Deshalb braucht man zur Beschreibung drei Maße. Wenn du einen Körper aus Pappe baust, stellst du ihn aus einem Netz her. Das Netz zeigt alle Flächen in einer Ebene und hilft beim Berechnen der Oberfläche.

Beim Volumen fragt man, wie viel in einen Körper hineinpasst, bei der Oberfläche, wie viel Material man für die Hülle braucht. Beide Größen haben unterschiedliche Einheiten und dürfen nicht verwechselt werden.

Beispiel 14: Würfel zählen im Quader

Ein Quader ist 5 cm lang, 3 cm breit und 2 cm hoch. Wie viele Würfel mit einem Zentimeter Kantenlänge passen hinein?

In die unterste Schicht passen 5 mal 3, also 15 Würfel. Der Quader hat zwei Schichten,

also passen 2 mal 15, das sind 30 Würfel hinein. Genau das berechnet die Formel für das Volumen: Länge mal Breite mal Höhe. Das Volumen beträgt 30 Kubikzentimeter. Die Schichtmethode macht anschaulich, warum man die drei Maße multipliziert.

So gehst du vor: Ein Würfelnetz prüfen

Zähle zuerst, ob genau sechs Quadrate vorhanden sind. Dann überlegst du, welche Flächen sich beim Falten gegenüberliegen. Du faltest im Kopf einen Streifen aus vier Quadraten zu einem Ring. Die beiden übrigen Quadrate müssen an dem Ring auf verschiedenen Seiten liegen, also oben und unten. Liegen zwei Quadrate an derselben Stelle übereinander, ist es kein Würfelnetz. Wenn du unsicher bist, schneide die Figur aus Papier aus und falte sie wirklich.

Wusstest du? Volumen und Gewicht von Wasser

Ein Würfel mit zehn Zentimetern Kantenlänge fasst genau einen Liter und wiegt, mit Wasser gefüllt, ein Kilogramm. Damit hängen Volumen, Hohlmaß und Masse zusammen. Das haben die Erfinder des Meter-Systems bewusst so festgelegt, damit Kaufleute und Handwerker leicht umrechnen können. Ein Kubikmeter Wasser wiegt also eine Tonne, und ein Schwimmbecken mit zweitausend Kubikmetern enthält zwei Millionen Kilogramm Wasser. Mit diesen Vergleichswerten kannst du viele Aufgaben im Kopf abschätzen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Quader und Würfel haben 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen; beim Würfel sind alle Kanten gleich lang.
- Ein Netz entsteht, wenn man die Oberfläche eines Körpers in die Ebene klappt; es gibt 11 verschiedene Würfelnetze.
- Kantensumme: Quader $4 \cdot (a + b + c)$, Würfel $12 \cdot a$.
- Oberfläche: Quader $O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$, Würfel $O = 6 \cdot a^2$ (Einheit cm^2).
- Volumen: Quader $V = a \cdot b \cdot c$, Würfel $V = a^3$ (Einheit cm^3).
- Volumeneinheiten rechnet man mit 1000 um; $1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$ und $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$.
- Fehlende Größen: $h = V : (a \cdot b)$; Längen vor dem Rechnen in dieselbe Einheit bringen.

Achtung

Oberfläche und Volumen werden verwechselt: Die Oberfläche misst in cm², das Volumen in cm³. Beim Umrechnen von Volumeneinheiten wird mit 100 statt 1 000 gerechnet. Beim Quader wird bei der Oberfläche leicht ein Rechteckpaar vergessen.

Hinweis

Frage dich zuerst: Geht es um die Fläche außen (Oberfläche, Farbe, Papier) oder um

den Raum innen (Volumen, Füllmenge)?

Ottos Tipp

Baue ein Netz aus Karopapier und falte es. Dann siehst du sofort, ob es ein Würfel wird, und du verstehst, warum die Oberfläche genau die Fläche des Netzes ist!