Lernzettel - Grundbegriffe der Geometrie

Klasse: Klasse 5

Die Geometrie beschäftigt sich mit Formen und Lagen. Hier lernst du ihre Grundbausteine kennen und wie du sauber zeichnest.

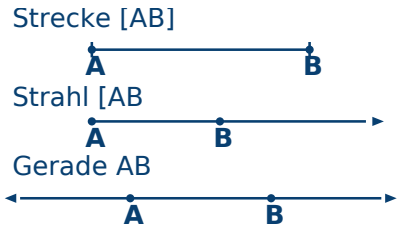
Einstieg: Der Weg zur Schule

Auf dem Stadtplan siehst du Straßen, die parallel verlaufen, Kreuzungen im rechten Winkel und einen runden Platz. Wie weit ist die Schule von der Straße entfernt? Welcher Weg ist der kürzeste? Solche Fragen beantwortet die Geometrie. In diesem Kapitel lernst du die Grundbegriffe: Punkt, Gerade, Strecke und Strahl, parallele und senkrechte Geraden, Abstand, Mittelsenkrechte und Kreis.

Punkt, Gerade, Strecke, Strahl

Definition: Punkt

Ein **Punkt** hat keine Ausdehnung. Man zeichnet ihn als kleines Kreuz und benennt ihn mit einem Großbuchstaben, zum Beispiel A oder B.



Definition: Strecke

Die **Strecke** $[AB]$ beginnt in A, endet in B und hat eine feste Länge. Die Länge schreibt man $|AB|$, zum Beispiel $|AB| = 5\ \text{cm}$.

Definition: Strahl

Der **Strahl** (die Halbgerade) $[AB$ beginnt in A, läuft durch B und ist dahinter unbegrenzt.

Definition: Gerade

Die **Gerade** AB läuft durch A und B und ist in beide Richtungen unbegrenzt. Geraden benennt man auch mit kleinen Buchstaben: g, h.

Regel

Durch zwei verschiedene Punkte geht **genau eine** Gerade. Durch einen einzigen Punkt gehen unendlich viele Geraden. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt, dem **Schnittpunkt**.

Beispiel 1: Drei Punkte

Gegeben sind die Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen. Welche Strecken kann man zeichnen?

Man kann die drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CA]$ zeichnen. Zusammen bilden sie ein Dreieck.

Parallele Geraden

Definition: parallel

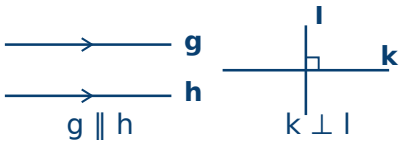
Zwei Geraden g und h heißen **parallel**, wenn sie sich nie schneiden und überall den gleichen Abstand haben. Man schreibt $g \parallel h$. Beispiele sind Eisenbahngleise oder die gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks.

Satz

Sind zwei Geraden parallel zu einer dritten, dann sind sie auch untereinander parallel.

So gehst du vor: Parallele zeichnen

1. Lege die lange Kante des Geodreiecks an die Gerade g.
2. Schiebe das Geodreieck senkrecht zu g um den gewünschten Abstand und lies ihn an den Hilfslinien ab.
3. Zeichne dort entlang der Kante die neue Linie.



Senkrechte Geraden

Definition: senkrecht

Zwei Geraden stehen **senkrecht** (orthogonal) aufeinander, wenn sie sich im rechten Winkel (90°) schneiden. Man schreibt $g \perp h$. Den rechten Winkel markiert man mit einem kleinen Viertelkreis und Punkt.

So gehst du vor: Senkrechte zeichnen

1. Lege die Mittellinie des Geodreiecks auf die Gerade.
2. Verschiebe es, bis der gewünschte Punkt an der Kante liegt.
3. Zeichne an der senkrechten Kante entlang.

Hinweis

Die Ecken eines Rechtecks sind rechte Winkel, deshalb sind benachbarte Rechteckseiten senkrecht zueinander.

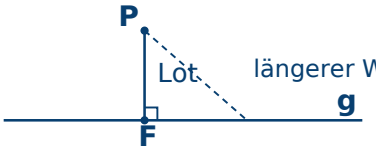
Abstand und Lot

Definition: Abstand und Lot

Der **Abstand** eines Punktes P von einer Geraden g ist die Länge der kürzesten Verbindung von P zu g. Diese kürzeste Strecke steht senkrecht auf g und heißt **Lot**.

Merke

Auch den Abstand zweier paralleler Geraden misst man senkrecht. Er ist überall gleich groß.



Beispiel 2: Straße überqueren

Auf dem Schulweg überquerst du eine Straße. Welcher Weg ist der kürzeste?

Der kürzeste Weg steht senkrecht zum Fahrbahnrand. Das ist genau das Lot.

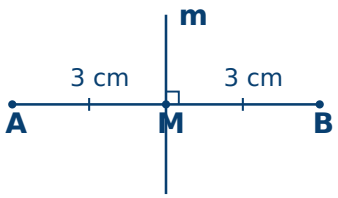
Die Mittelsenkrechte

Definition: Mittelsenkrechte

Die **Mittelsenkrechte** einer Strecke $[AB]$ steht senkrecht auf der Strecke und geht durch ihren Mittelpunkt.

Merke

Alle Punkte der Mittelsenkrechten sind von A und B gleich weit entfernt. Hat $[AB]$ die Länge 6 cm, liegt der Mittelpunkt 3 cm von A entfernt.



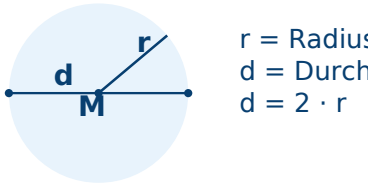
Der Kreis

Definition: Kreis

Ein **Kreis** besteht aus allen Punkten, die von einem festen Punkt, dem **Mittelpunkt** M, denselben Abstand r haben. Dieser Abstand heißt **Radius**. Der **Durchmesser** ist doppelt so lang wie der Radius: $d = 2 \cdot r$.

So gehst du vor: Kreis zeichnen

1. Stich die Zirkelspitze in den Mittelpunkt M.
2. Stelle den Radius ein, indem du die Mine an die Länge am Lineal bringst.
3. Drehe den Zirkel einmal herum.



Beispiel 3: Punkte und Kreis

Ein Kreis hat den Mittelpunkt M und den Radius 3 cm. Wo liegen die Punkte P mit $|MP| = 3\ \text{cm}$, Q mit $|MQ| = 2\ \text{cm}$ und R mit $|MR| = 5\ \text{cm}$?

P liegt genau auf dem Kreis, Q liegt innerhalb (Abstand kleiner als r) und R liegt außerhalb (Abstand größer als r).

Vierecke als Anwendung

Definition: Rechteck und Quadrat

Ein **Rechteck** hat vier rechte Winkel, gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel. Ein **Quadrat** ist ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten.

Definition: Diagonale

Die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Ecken heißen **Diagonalen**. Im Quadrat sind sie gleich lang und stehen senkrecht aufeinander.

Sauber zeichnen

So gehst du vor: Sauber zeichnen

1. Benutze einen gespitzten, harten Bleistift (HB oder H).
2. Zeichne Hilfslinien dünn und ziehe erst am Ende die Ergebnisse nach.
3. Beschrifte Punkte mit Großbuchstaben gegen den Uhrzeigersinn.
4. Miss Längen vom Nullpunkt des Lineals aus.

Beispiel 4: Anzahl der Verbindungsstrecken

Fünf Freunde geben sich zur Begrüßung alle die Hand. Wie viele Handschläge gibt es? Wie viele Strecken verbinden 5 Punkte?

Jeder der 5 Freunde gibt 4 anderen die Hand. Das wären $5 \cdot 4 = 20$ Handschläge, aber jeder Handschlag wurde doppelt gezählt. Also gibt es $20 : 2 = 10$ Handschläge, und 10 Strecken verbinden 5 Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Beispiel 5: Der kürzeste Weg zum Fluss

Ein Wanderer steht $300\,\mathrm{m}$ von einem geraden Fluss entfernt. Welcher Weg zum Fluss ist am kürzesten?

Der kürzeste Weg ist das Lot: Er steht senkrecht auf dem Fluss. Jeder schräge Weg ist länger als $300\,\mathrm{m}$, denn er ist die längste Seite in einem rechtwinkligen Dreieck. Der Abstand des Wanderers vom Fluss beträgt daher genau die Länge des Lotes, also $300\,\mathrm{m}$.

Beispiel 6: Gleicher Abstand zu zwei Punkten

Wo liegen alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind?

Alle diese Punkte liegen auf der Mittelsenkrechten von . Man konstruiert sie mit dem Zirkel: Kreisbögen mit gleichem Radius um A und B schneiden sich in zwei Punkten, die man verbindet. Diese Gerade geht durch die Mitte von und steht senkrecht darauf. Jeder ihrer Punkte hat zu A und B denselben Abstand.

Typische Fehler

(1) Strecke, Strahl und Gerade verwechseln und beim Schreiben die Zeichen vertauschen. (2) Beim Abstand nicht senkrecht messen: Nur das Lot gibt den Abstand

an. (3) Beim Zeichnen von Parallelen den Abstand nicht überall gleich halten. (4) Bei der Anzahl der Verbindungsgeraden doppelt zählen. (5) Beim Zirkel den Radius mit dem Durchmesser verwechseln: Die Spitze steht auf dem Mittelpunkt, die Öffnung entspricht dem Radius.

Wusstest du?

Der griechische Mathematiker Euklid schrieb um das Jahr 300 vor Christus das Buch „Die Elemente“. Darin steht, dass durch zwei Punkte genau eine Gerade geht. Das Buch wurde mehr als 2000 Jahre lang als Lehrbuch benutzt. Euklids Geometrie gilt noch heute in der Schule, auch wenn man auf der gekrümmten Erde andere Regeln braucht: Zwei Längenkreise (Meridiane) schneiden sich am Nordpol, obwohl sie am Äquator parallel aussehen.

Geometrie beginnt mit dem Zeichnen

Die Geometrie handelt von Punkten, Linien und Figuren. Diese Grundbegriffe sind Idealisierungen: Ein Punkt hat keine Größe, eine Linie keine Breite. In der Zeichnung machen wir sie sichtbar, aber das Papier kann nur eine Annäherung zeigen. Deshalb ist sauberes Arbeiten wichtig. Du zeichnest mit einem gespitzten Bleistift, benutzt Lineal, Geodreieck und Zirkel und beschriftest jeden Punkt mit einem Großbuchstaben. Eine ordentliche Zeichnung hilft nicht nur dem Lehrer beim Lesen, sondern auch dir selbst beim Denken, weil du Fehler schneller erkennst.

So gehst du vor: Kreis zeichnen und beschriften

Markiere den Mittelpunkt mit einem kleinen Kreuz und beschrifte ihn mit M. Stelle den Zirkel auf den gewünschten Radius ein, indem du die Spitze auf die Null des Lineals setzt. Setze die Spitze auf den Mittelpunkt, halte den Zirkel am Griff und drehe ihn in einer gleichmäßigen Bewegung einmal um. Zeichne dann einen Radius und einen Durchmesser ein und beschrifte sie. Kontrolliere zum Schluss mit dem Lineal, dass der Durchmesser doppelt so lang ist wie der Radius.

Beispiel 7: Parallele Geraden im Alltag

Wo findest du im Klassenzimmer parallele und senkrechte Linien?

Die gegenüberliegenden Kanten der Tafel sind parallel, ebenso die Kanten eines Tisches. Zwei benachbarte Kanten des Tisches stehen senkrecht aufeinander und bilden einen rechten Winkel. Die Fensterbank und die Bodenkante sind parallel, die Wand steht senkrecht auf dem Boden. Du erkennst parallele Linien daran, dass sie überall denselben Abstand haben und sich nie schneiden, auch wenn man sie beliebig verlängert.

Beispiel 8: Der Abstand als kürzeste Verbindung

Eine Wanderin steht 400 Meter von einer geraden Landstraße entfernt. Was bedeutet der Abstand zur Straße?

Der Abstand ist die Länge der kürzesten Verbindung zur Straße. Diese Verbindung steht senkrecht auf der Straße und heißt Lot. Jeder schräge Weg ist länger als 400 Meter. Wenn die Wanderin die Straße an einer anderen Stelle erreichen will, muss sie deshalb mehr als 400 Meter gehen. Das Lot ist daher der kürzeste Weg, und seine Länge nennt man Abstand.

Wusstest du? Die Geometrie der Pyramiden

Die alten Ägypter bauten Pyramiden mit erstaunlicher Genauigkeit. Sie nutzten Seile mit Knoten im gleichen Abstand, um rechte Winkel zu bekommen. Dazu spannten sie ein Seil mit zwölf gleichen Abschnitten zu einem Dreieck mit den Seitenlängen drei, vier und fünf. Dieses Dreieck hat einen rechten Winkel. Die Seilspanner waren also frühe Geometer. Bis heute verwenden Handwerker diesen Trick, um auf Baustellen rechte Winkel zu markieren, wenn sie kein Winkelmaß zur Hand haben.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein Punkt hat keine Ausdehnung; eine Strecke hat zwei Endpunkte und eine Länge, ein Strahl einen Anfangspunkt, eine Gerade keinen Endpunkt.
- Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade; bei n Punkten (keine drei auf einer Geraden) gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungsgeraden.
- Parallele Geraden haben überall denselben Abstand ($g \parallel h$); senkrechte Geraden schneiden sich im rechten Winkel ($g \perp h$).
- Der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist die Länge des Lotes, der kürzesten Verbindung.
- Die Mittelsenkrechte einer Strecke geht durch deren Mittelpunkt und steht senkrecht darauf; ihre Punkte sind von beiden Endpunkten gleich weit entfernt.
- Ein Kreis besteht aus allen Punkten mit gleichem Abstand r vom Mittelpunkt; der Durchmesser ist doppelt so lang wie der Radius.
- Rechteck: vier rechte Winkel, gleich lange Diagonalen; Quadrat: zusätzlich vier gleiche Seiten und senkrechte Diagonalen.

Achtung

Strecke und Gerade werden verwechselt: Eine Strecke hat Anfang und Ende, eine Gerade nicht. Der Abstand von Punkt und Gerade wird oft schräg gemessen statt senkrecht. Geraden, die sich auf dem Blatt nicht schneiden, sind nicht automatisch parallel: Schneiden sie sich erst außerhalb des Blattes, sind sie *nicht* parallel. Prüfe den Abstand an mehreren Stellen.

Ottos Tipp

Markiere rechte Winkel immer mit dem kleinen Quadrat. Dann sieht deine Lehrkraft sofort, dass du die Senkrechte bewusst gezeichnet hast!