Lösungen - Grundbegriffe der Geometrie

Klasse: Klasse 5

Lösung zu Aufgabe 1

a) Eine Strecke ist ein gerades Stück zwischen zwei Endpunkten; sie hat eine feste Länge. Ein Strahl beginnt in einem Anfangspunkt und läuft in eine Richtung unendlich weiter. Eine Gerade hat weder Anfang noch Ende; sie läuft in beide Richtungen unendlich weiter.
b) Messen kann man nur die Strecke, weil sie zwei Endpunkte hat. Strahl und Gerade sind unendlich lang; man kann ihnen keine Länge zuordnen.
c) Strecke: die Kante eines Tisches oder ein Lineal. Strahl: der Lichtstrahl einer Taschenlampe, der an der Lampe beginnt und weit in den Raum reicht.
d) Strecke 2 Endpunkte, Strahl 1 (der Anfangspunkt), Gerade keinen.

Lösung zu Aufgabe 2

In der Geometrie verwendet man kurze Zeichen, damit man nicht alles ausschreiben muss.

a) . Der Querstrich zeigt: Es ist die Strecke mit den Endpunkten A und B.

b) Strahl $AB^{\rightarrow}$: Er beginnt bei A und läuft durch B hindurch weiter. Die Reihenfolge der Buchstaben ist wichtig.

c) Gerade $\overleftrightarrow{CD}$: Pfeile in beide Richtungen, weil sie über C und D hinaus weiterläuft.

d) $g \parallel h$ bedeutet „g ist parallel zu h“. $P \in g$ bedeutet „P liegt auf g“.

Lösung zu Aufgabe 3

Jedes Paar von zwei Punkten legt genau eine Gerade fest. Wir zählen also die Punktepaare.
a) Bei 3 Punkten A, B, C: Paare AB, AC, BC, also 3 Geraden.
b) Bei 4 Punkten ist jeder Punkt mit 3 anderen verbunden: $4 \cdot 3 = 12$. Jede Gerade wurde dabei zweimal gezählt (AB und BA), also $12 : 2 = 6$ Geraden.
c) Bei 5 Punkten: $5 \cdot 4 = 20$, halbiert 10 Geraden.
d) Bei 6 Punkten: $6 \cdot 5 = 30$, halbiert 15 Verbindungsstrecken.
Regel: Anzahl mal (Anzahl minus 1), geteilt durch 2.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Lege das Geodreieck so an, dass eine der parallelen Hilfslinien genau auf g liegt. Verschiebe es entlang dieser Linie, bis die Zeichenkante durch P geht, und zeichne die Parallele. Kontrolle: Der Abstand zu g muss überall 3 cm betragen.
b) Lege die Mittellinie des Geodreiecks (die Linie zur 0) genau auf g und verschiebe, bis die Zeichenkante durch P geht. Zeichne entlang der Kante; die Linie steht senkrecht auf g.

c) $h \parallel g$ und $h \perp k$.
d) Sind zwei Geraden zu einer dritten parallel, sind sie auch zueinander parallel, denn alle drei haben dieselbe Richtung.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Lege das Geodreieck mit der Mittellinie auf die Gerade und verschiebe es, bis die Zeichenkante durch P geht. Ziehe die Senkrechte von P bis zur Geraden. Der Schnittpunkt heißt Lotfußpunkt; das Lot muss 2,5 cm lang sein.
b) Jede schräge Verbindung von P zur Geraden bildet mit dem Lot ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die schräge Strecke die längste Seite ist. Deshalb ist das Lot am kürzesten.
c) Der Punkt liegt 1,5 cm von der einen und 1,5 cm von der anderen Geraden entfernt: Abstand der Geraden $1{,}5 + 1{,}5 = 3\,\text{cm}$.
d) Alle Punkte mit 2 cm Abstand zu g liegen auf zwei Parallelen zu g, eine auf jeder Seite, jeweils 2 cm entfernt.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $d = 2 \cdot r = 2 \cdot 3{,}5 = 7\,\text{cm}$.
b) $r = d : 2 = 12 : 2 = 6\,\text{cm}$.
c) Stelle den Zirkel am Lineal auf 4 cm ein (Abstand zwischen Spitze und Mine). Setze die Spitze auf den Mittelpunkt M und drehe einmal ganz herum, ohne den Zirkel zu verstellen.
d) Man kann unendlich viele Radien zeichnen, denn jeder Punkt der Kreislinie ergibt mit M einen Radius. Auch Durchmesser gibt es unendlich viele: Jede Gerade durch M schneidet den Kreis in zwei Punkten, die einen Durchmesser begrenzen.

Lösung zu Aufgabe 7

Wir vergleichen den Abstand jedes Punktes zu M mit dem Radius 3 cm.
a) B hat genau den Abstand 3 cm, er liegt auf der Kreislinie.
b) A hat 2 cm, das ist weniger als der Radius: A liegt innerhalb. C hat 4,5 cm, das ist mehr: C liegt außerhalb.
c) Liegt M zwischen A und C auf einer Geraden, addieren sich die Abstände: $2 + 4{,}5 = 6{,}5\,\text{cm}$.
d) Alle Punkte mit höchstens 3 cm Abstand bilden die Kreisfläche: die Kreislinie selbst und alles im Inneren.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Stelle den Zirkel auf mehr als die Hälfte von 6 cm ein, zum Beispiel 4 cm. Zeichne um A und um B Kreisbögen oberhalb und unterhalb der Strecke. Die Bögen schneiden sich in zwei Punkten; die Gerade durch diese Punkte ist die Mittelsenkrechte.
b) Die Mittelsenkrechte schneidet im Mittelpunkt M. $AM = 6 : 2 = 3\,\text{cm}$.
c) Jeder Punkt der Mittelsenkrechten ist von A und B gleich weit entfernt. P ist also auch 5 cm von B entfernt.

d) Man verbindet die beiden Wohnorte und konstruiert die Mittelsenkrechte. Auf ihr hat jede Freundin denselben Weg (Luftlinie).

Lösung zu Aufgabe 9

a) Ein Rechteck hat vier rechte Winkel. Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel. Die beiden Diagonalen sind gleich lang und halbieren sich.
b) Beim Quadrat sind zusätzlich alle vier Seiten gleich lang, und die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.
c) Ein Rechteck hat 2 Diagonalen. Sie sind gleich lang, also beide 13 cm.
d) In eine Reihe passen 8 Kästchen, es gibt 5 Reihen: $8 \cdot 5 = 40$ Kästchen. Es ist kein Quadrat, weil die Seiten 8 cm und 5 cm verschieden lang sind.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Die Schule liegt zwischen den Straßen auf der Querstraße. Bis zur Bahnhofstraße bleiben $240 - 80 = 160\,\text{m}$.
b) Die Schulstraße kreuzt die Hauptstraße senkrecht, also unter 90°. Alle vier Winkel an der Kreuzung sind rechte Winkel.
c) Der kürzeste Weg zur Hauptstraße ist das Lot; es verläuft entlang der Schulstraße und ist 80 m lang.
d) An der Hauptstraße angekommen, ist sie 240 m von der Bahnhofstraße entfernt. Läuft sie entlang der Hauptstraße, ändert sich dieser Abstand nicht, weil die Straßen parallel sind. Sie ist weiterhin 240 m entfernt.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Skizze: Die Straße ist eine waagerechte Gerade. F liegt auf der Straße, S senkrecht darüber im Abstand 120 m. H liegt auf der Straße 90 m neben F. S, F und H bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei F.
b) $120 + 90 = 210\,\text{m}$.
c) Länger als 120 m. Das Lot SF ist die kürzeste Verbindung von S zur Straße; jeder schräge Weg zu einem anderen Straßenpunkt ist länger. In einer maßstäblichen Zeichnung misst man für SH etwa 150 m, also kürzer als der Umweg über F (210 m).
d) Am kürzesten ist der Weg zum Lotfußpunkt F: 120 m.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Radius des Teiches: $r = d : 2 = 8 : 2 = 4\,\text{m}$.
b) Die innere Wegkante ist 2 m vom Teichrand entfernt. Ihr Radius ist $4 + 2 = 6\,\text{m}$.
c) Durchmesser der inneren Wegkante: $2 \cdot 6 = 12\,\text{m}$.
d) Der Weg ist 1 m breit, die äußere Kante hat also den Radius $6 + 1 = 7\,\text{m}$ und den Durchmesser $2 \cdot 7 = 14\,\text{m}$.
Alle Kreise haben denselben Mittelpunkt; sie heißen konzentrische Kreise.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Parallel zur Grundlinie verlaufen die gegenüberliegende Grundlinie, die Netzlinie in der Mitte und die beiden Aufschlaglinien.
b) Senkrecht auf der Grundlinie stehen die Seitenlinien (und die Mittellinie zwischen den Aufschlagfeldern).
c) In einem Rechteck sind beide Diagonalen gleich lang, also je 25 m. Sie schneiden sich im Mittelpunkt des Platzes, genau unter dem Netz, und halbieren sich dort in Stücke von 12,5 m.
d) Der direkte Weg von einer Ecke zur gegenüberliegenden Ecke ist die Diagonale: 25 m Luftlinie.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Alle Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke .

b) Die Gesamtstrecke beider Mädchen ist am kleinsten, wenn der Treffpunkt auf der direkten Verbindung liegt. Dort trifft die Mittelsenkrechte die Strecke: im Mittelpunkt von .

c) Jede muss mindestens $8 : 2 = 4\,\text{km}$ gehen.
d) P liegt auf der Mittelsenkrechten. Deshalb ist P auch 5 km von B entfernt. Beide gehen dann 5 km, zusammen 10 km statt 8 km.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Zeichne . Stelle den Zirkel auf 4 cm und zeichne den Kreis um A. Stelle ihn auf 5 cm und zeichne den Kreis um B.

b) Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten, einer oberhalb, einer unterhalb von . Beide sind 4 cm von A und 5 cm von B entfernt; es gibt also 2 mögliche Schatzorte.
c) Zwei verschiedene Kreise können sich höchstens in zwei Punkten schneiden. Mehr Orte gibt es daher nicht.
d) Bei Radien 4 cm und 1 cm reichen die Kreise zusammen nur $4 + 1 = 5\,\text{cm}$ weit; die Bäume sind aber 6 cm entfernt. Die Kreise berühren sich nicht, es gibt keinen Schatzort.

Lösung zu Aufgabe 16

Jedes Paar von Geraden schneidet sich in genau einem Punkt (keine Parallelen), und keine drei gehen durch denselben Punkt. Wir zählen also die Geradenpaare.
a) 2 Geraden: 1 Paar, 1 Schnittpunkt.
b) 3 Geraden: 3 Paare, 3 Schnittpunkte.
c) 4 Geraden: $4 \cdot 3 : 2 = 6$ Schnittpunkte.
d) 5 Geraden: $5 \cdot 4 : 2 = 10$ Schnittpunkte. Regel: Bei n Geraden gibt es $n \cdot (n-1) : 2$ Schnittpunkte. Jede neue Gerade schneidet alle bisherigen:
$1, 1 + 2 = 3, 3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10$.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Empfang hat jeder Ort, der höchstens 5 km vom Mast entfernt ist. Dorf A (3 km) hat Empfang, Dorf C (genau 5 km) liegt auf dem Rand und hat gerade noch Empfang. Dorf B (6 km) liegt außerhalb.
b) Das Empfangsgebiet ist eine Kreisfläche um den Mast mit Radius 5 km, also mit Durchmesser 10 km.
c) Die Reichweite müsste mindestens 6 km sein, also $6 - 5 = 1\,\text{km}$ größer.
d) Von jedem Mast reicht das Signal 5 km weit, zusammen 10 km. Die Masten sind nur 8 km voneinander entfernt. Da $10 > 8$, überlappen sich die beiden Kreisgebiete in einem Streifen von 2 km Breite.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Die Messpunkte liegen bei 0 m, 2 m, 4 m und 6 m. Die Punkte bei 0 m und 6 m liegen auf den Radwegen, dazwischen liegen 2 Punkte (bei 2 m und 4 m).
b) Die Querstraße steht senkrecht auf den Radwegen; zwischen ihnen ist sie genau so lang wie der Abstand: 6 m.
c) Der kürzeste Weg ist 6 m. Der schräge Weg ist $10 - 6 = 4\,\text{m}$ länger.
d) Von jedem Punkt aus ist das Lot die kürzeste Verbindung zur anderen Geraden. Da die Wege parallel sind, ist dieses Lot überall gleich lang, nämlich 6 m; jeder schräge Weg ist länger.

Lösung zu Aufgabe 19

a) In einem Rechteck sind beide Diagonalen gleich lang. Man misst also beide Diagonalen und vergleicht.
b) 178 cm und 179 cm unterscheiden sich um 1 cm. Bei einem Maßband kann das ein Messfehler sein; man sollte noch einmal genau messen. Bestätigt sich der Unterschied, ist der Tisch kein genaues Rechteck.
c) Wären die Diagonalen wirklich verschieden lang, wäre mindestens eine Ecke kein exakter rechter Winkel; der Tisch wäre ein wenig schief.
d) 160 cm sind 16 dm, 80 cm sind 8 dm: $16 \cdot 8 = 128$ Kästchen von $1\,\text{dm}^2$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Das Gitter hat 2 Zeilen und 3 Spalten: $2 \cdot 3 = 6$ kleine Quadrate.
b) Rechtecke 1×2 (zwei Felder nebeneinander): In jeder der 2 Zeilen gibt es 2 Möglichkeiten, also 4. Rechtecke 2×1 (zwei Felder übereinander): in jeder der 3 Spalten eins, also 3. Zusammen 7.
c) Ein Rechteck wird durch zwei senkrechte und zwei waagerechte Gitterlinien festgelegt. Aus 4 senkrechten Linien kann man $4 \cdot 3 : 2 = 6$ Paare wählen, aus 3 waagerechten $3 \cdot 2 : 2 = 3$ Paare. Insgesamt $6 \cdot 3 = 18$ Rechtecke. Kontrolle nach Größen: $6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 18$.