Lernzettel - Einführung in Brüche

Klasse: Klasse 5

Teilst du eine Pizza gerecht auf 8 Kinder, bekommt jedes Kind **ein Achtel**. Für solche Anteile brauchen wir Brüche. In diesem Kapitel lernst du, Brüche zu lesen, zu vergleichen, zu erweitern und zu kürzen.

Einstieg: Pizza gerecht teilen

Vier Freunde bestellen drei Pizzen. Wie viel bekommt jeder? Jede Pizza wird in vier Stücke geschnitten, also gibt es 12 Stücke. Jeder bekommt 3 Stücke, das ist $\frac{3}{4}$ einer Pizza. So entstehen Brüche: Sie beschreiben Teile eines Ganzen und das gerechte Verteilen. In diesem Kapitel lernst du, Brüche zu lesen, zu zeichnen, zu vergleichen, zu erweitern und zu kürzen.

Was ist ein Bruch?

Definition: Bruch

Ein Bruch beschreibt einen Teil von einem Ganzen: $\frac{3}{8}$ (gesprochen: drei Achtel). Die Zahl unter dem Bruchstrich heißt **Nenner**. Sie sagt, in wie viele gleich große Teile das Ganze geteilt wird. Die Zahl über dem Strich heißt **Zähler**. Er sagt, wie viele dieser Teile genommen werden.

Definition: Stammbruch

Brüche mit dem Zähler 1 heißen **Stammbrüche**: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, …

Merke

Die Teile müssen **gleich groß** sein. Je größer der Nenner, desto kleiner der Stammbruch: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

Beispiel 1: Schokolade

Eine Tafel hat 12 Stücke. Mia isst 3 Stücke, Tom isst 6 Stücke. Welcher Bruchteil bleibt übrig?

Mia isst $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, Tom $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Zusammen sind das $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ der Tafel, also bleibt $\frac{1}{4}$ übrig.

Bruchteile von Größen

So gehst du vor: Bruchteil einer Größe bestimmen

1. Teile die Größe durch den Nenner.
2. Multipliziere das Ergebnis mit dem Zähler.
3. Schreibe die Einheit dazu.

Beispiel 2: Dreiviertel von 20 kg

Bestimme $\frac{3}{4}$ von 20 kg und $\frac{2}{5}$ von 35 €.

$20 : 4 = 5$ (das ist ein Viertel), dann $5 \cdot 3 = 15$. Also sind $\frac{3}{4}$ von 20 kg gleich 15 kg. Ebenso: $35 : 5 \cdot 2 = 14$, also 14 €.

Beispiel 3: Schulweg

Der Schulweg ist 2 km lang. Jonas ist schon $\frac{3}{5}$ gelaufen. Wie viele Meter sind das?

Ein Fünftel sind $2\,000 : 5 = 400\ \text{m}$, also hat er $3 \cdot 400 = 1\,200\ \text{m}$ geschafft. Es bleiben noch 800 m.

Hinweis

Eine halbe Stunde sind 30 Minuten, eine Viertelstunde 15 Minuten, eine Dreiviertelstunde 45 Minuten. $\frac{1}{6}$ Stunde sind 10 Minuten.

Brüche am Zahlenstrahl

So gehst du vor: Bruch am Zahlenstrahl einzeichnen

1. Frage dich: In wie viele Abschnitte ist ein Ganzes geteilt? Das ist der Nenner.
2. Teile die Strecke von 0 bis 1 in so viele gleich große Abschnitte.
3. Gehe so viele Abschnitte von 0 aus, wie der Zähler angibt.

Beispiel 4: Drei Fünftel und sieben Viertel

Zeichne $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{4}$ auf dem Zahlenstrahl ein.

Für $\frac{3}{5}$ teilt man die Strecke von 0 bis 1 in 5 Abschnitte und geht 3 Abschnitte. Der Bruch $\frac{5}{5}$ läge genau bei 1. Brüche größer als 1 liegen rechts von der 1: $\frac{7}{4}$ liegt 7 Viertel vom Nullpunkt entfernt, also bei 1 und $\frac{3}{4}$.

Echte und unechte Brüche, gemischte Zahlen

Definition: echter und unechter Bruch

Ein Bruch, dessen Zähler *kleiner* als der Nenner ist, heißt **echter Bruch** (kleiner als 1). Ist der Zähler *größer oder gleich* dem Nenner, heißt der Bruch **unecht** (größer oder gleich 1).

Definition: gemischte Zahl

Eine **gemischte Zahl** besteht aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch, zum Beispiel $1\frac{3}{4}$.

So gehst du vor: Umwandeln

1. Unechter Bruch in gemischte Zahl: Teile den Zähler durch den Nenner. Der Rest bleibt Zähler.
2. Gemischte Zahl in unechten Bruch: Rechne Ganze mal Nenner plus Zähler, der Nenner bleibt.

Beispiel 5: Umwandeln

Schreibe $\frac{17}{5}$ als gemischte Zahl und $3\frac{3}{4}$ als unechten Bruch.

$\frac{17}{5} = 17:5 = 3$ Rest 2, also $3\frac{2}{5}$. Umgekehrt: $3\frac{3}{4} = \frac{3\cdot4+3}{4} = \frac{15}{4}$. Ebenso ist $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ und $2\frac{1}{3} = \frac{2\cdot3+1}{3} = \frac{7}{3}$.

Brüche vergleichen

Regel: Vergleichen

Bei **gleichem Nenner** ist der Bruch mit dem größeren Zähler größer. Bei **gleichem Zähler** ist der Bruch mit dem kleineren Nenner größer, denn die Teile sind größer. Sonst bringt man die Brüche auf denselben Nenner.

Beispiel 6: Brüche vergleichen

Vergleiche $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{9}$ und $\frac{4}{9}$ sowie $\frac{3}{5}$ und $\frac{3}{8}$.

$\frac{3}{8}, \frac{7}{9} > \frac{4}{9}$ und $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$, denn bei gleichem Zähler gewinnt der kleinere Nenner.

Erweitern und Kürzen

Definition: Erweitern

Beim **Erweitern** werden Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Der Wert des Bruchs ändert sich nicht.

Definition: Kürzen

Beim **Kürzen** werden Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Am besten kürzt man mit dem ggT.

Merke

Erweitern und Kürzen ändern nur die Schreibweise, nicht den Wert. Auf dem Zahlenstrahl liegt der Punkt immer an derselben Stelle.

Beispiel 7: Erweitern und Kürzen

Erweitere $\frac{1}{2}$ mit 3 und kürze $\frac{6}{8}$ sowie $\frac{12}{18}$.

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$. $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$. $\frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}$.

Division und Bruch

Merke

Ein Bruch ist auch eine Divisionsaufgabe: $3 : 4 = \frac{3}{4}$ und $5 : 8 = \frac{5}{8}$.

Beispiel 8: Pizza verteilen

3 Pizzen werden gerecht auf 4 Kinder verteilt. Wie viel bekommt jedes Kind?

$3 : 4 = \frac{3}{4}$. Jedes Kind bekommt $\frac{3}{4}$ einer Pizza.

Beispiel 9: Klassenumfrage

In einer Klasse mit 20 Kindern lieben $\frac{7}{20}$ Fußball, $\frac{5}{20}$ Schwimmen und $\frac{8}{20}$ etwas anderes. Prüfe die Anteile.

$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ und $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. Zusammen ist $\frac{7+5+8}{20} = \frac{20}{20} = 1$, also sind alle Kinder erfasst. Alle Anteile zusammen müssen ein Ganzes ergeben.

Beispiel 10: Bruchteil einer Menge im Alltag

In einer Klasse mit 28 Kindern spielen $\frac{3}{7}$ ein Instrument. Wie viele Kinder sind das?

Zuerst teilt man durch den Nenner: $28 : 7 = 4$. Dann multipliziert man mit dem Zähler: $3 \cdot 4 = 12$. Es sind 12 Kinder. Probe: $\frac{1}{7}$ der Klasse sind 4 Kinder, $\frac{7}{7}$ sind 28 Kinder. Das

passt.

Beispiel 11: Gleichwertige Brüche erkennen

Sind $\frac{6}{9}$ und $\frac{8}{12}$ gleich groß?

Beide Brüche kürzt man: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (durch 3) und $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ (durch 4). Beide Brüche haben denselben Wert $\frac{2}{3}$. Sie beschreiben denselben Anteil, nur mit verschieden vielen Teilen: 6 von 9 Teilen entsprechen 8 von 12 Teilen.

Beispiel 12: Ganzes aus dem Teil bestimmen

$\frac{1}{5}$ einer Strecke sind $6\,\text{cm}$ lang. Wie lang ist die ganze Strecke?

Wenn ein Fünftel $6\,\text{cm}$ misst, ergeben fünf Fünftel $5 \cdot 6 = 30\,\text{cm}$. Das Ganze ist also $30\,\text{cm}$ lang. Hier geht man den umgekehrten Weg: erst mit dem Nenner multiplizieren, nicht dividieren.

Typische Fehler

(1) Die Teile sind nicht gleich groß: Ein Bruch setzt gleich große Teile voraus. (2) Zähler und Nenner verwechseln: $\frac{3}{8}$ heißt „drei von acht“, nicht „acht von drei“. (3) Beim Erweitern nur den Nenner mit der Zahl multiplizieren: $\frac{2}{3} = \frac{2}{12}$ ist falsch, richtig ist $\frac{8}{12}$. (4) Beim Vergleichen nur auf den Nenner achten: $\frac{1}{8}$ ist kleiner als $\frac{1}{4}$, obwohl $8 > 4$. (5) Beim Kürzen nur den Zähler teilen.

Wusstest du?

Schon die alten Ägypter rechneten mit Brüchen, aber fast nur mit Stammbrüchen, also mit Zähler 1. Sie schrieben zum Beispiel $\frac{3}{4}$ als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Der Bruchstrich, wie wir ihn heute kennen, wurde im Mittelalter von arabischen Gelehrten benutzt und kam über den Mathematiker Fibonacci um das Jahr 1200 nach Europa. Das Wort „Bruch“ erinnert daran, dass ein Ganzes in Teile „gebrochen“ wird.

Beispiel 13: Brüche mit Alltagsgrößen

Eine Flasche enthält $\frac{3}{4}$ Liter. Wie viele Milliliter sind das?

1 Liter sind 1000 Milliliter. Ein Viertel davon sind $1000 : 4 = 250$ Milliliter, drei Viertel sind $3 \cdot 250 = 750$ Milliliter.

Brüche als Teile von etwas

Ein Bruch beschreibt, wie viele gleich große Teile von einem Ganzen gemeint sind. Der Nenner sagt, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wird, der Zähler sagt, wie viele dieser Teile man nimmt. Das Ganze kann eine Pizza, eine Tafel Schokolade,

eine Strecke oder eine Gruppe von Kindern sein. Entscheidend ist, dass die Teile wirklich gleich groß sind. Drei ungleiche Stücke einer Torte sind kein Drittel. Wenn du das beachtest, kannst du jeden Bruch anschaulich erklären.

Brüche haben im Alltag viele Namen. Wir sprechen von einem halben Liter, einem Viertel der Klasse oder drei Vierteln der Strecke. Du kannst immer den Bruch in Worte fassen und umgekehrt, das hilft beim Verstehen und Rechnen.

Beispiel 14: Bruchteil einer Strecke

Ein Wanderweg ist 12 Kilometer lang. Nach drei Fünfteln machen die Kinder Pause. Wie viele Kilometer sind sie gegangen?

Zuerst teilen wir den Weg in fünf gleiche Teile: 12 Kilometer durch 5 ergibt 2 Komma 4 Kilometer pro Fünftel. Drei Fünftel sind dann 3 mal 2 Komma 4, also 7 Komma 2 Kilometer. Sie haben noch 12 minus 7 Komma 2, das sind 4 Komma 8 Kilometer vor sich. Das entspricht zwei Fünfteln. Die Rechnung zeigt, dass Zähler und Nenner zusammen den Weg beschreiben.

Beispiel 15: Brüche am Zahlenstrahl ablesen

Wo liegt fünf Viertel am Zahlenstrahl?

Wir teilen den Abschnitt von null bis eins in vier gleich große Teile. Jeder Teil ist ein Viertel. Vier Viertel sind genau eins. Fünf Viertel liegen also einen Teilstrich hinter der eins. Ein unechter Bruch wie fünf Viertel ist größer als eins und lässt sich als gemischte Zahl schreiben: eins und ein Viertel. Am Zahlenstrahl sieht man das sofort, weil der Punkt zwischen eins und zwei liegt.

So gehst du vor: Brüche vergleichen

Haben beide Brüche denselben Nenner, ist der Bruch mit dem größeren Zähler größer. Haben sie denselben Zähler, ist der Bruch mit dem kleineren Nenner größer, weil die Teile größer sind. Sonst erweiterst du beide Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und vergleichst dann die Zähler. Als Kontrolle kannst du beide Brüche am Zahlenstrahl oder an gleich großen Rechtecken zeichnen.

Brüche im Haushalt und Sport

Beim Kochen begegnen dir Brüche ständig: ein halber Liter Milch, ein Viertel Pfund Butter, ein Achtel Liter Sahne. Im Sport sagt man, dass eine Mannschaft zwei Drittel der Spiele gewonnen hat. Auch die Zeit wird in Brüchen angegeben: Eine Viertelstunde sind fünfzehn Minuten, eine Dreiviertelstunde sind fünfundvierzig Minuten. Wenn du solche Alltagsbrüche in andere Einheiten umrechnen kannst, wirst du im Kopf viel schneller. Probiere es mit den Dingen in deiner Küche aus.

Wusstest du? Musik und Brüche

Auch in der Musik stecken Brüche. Notenwerte werden als Brüche eines ganzen Taktes angegeben: Eine halbe Note dauert halb so lang wie eine ganze, eine Viertelnote ein Viertel. Ein Viervierteltakt enthält vier Viertelnoten. Wer Noten lesen kann, rechnet also ständig mit Brüchen, oft ohne es zu merken. Das zeigt: Mathematik ist nicht nur Zahlen und Formeln, sie steckt auch in Kunst und Kultur.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Ein Bruch $\frac{Zähler}{Nenner}$ beschreibt Teile eines Ganzen: Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile geteilt wird, der Zähler, wie viele Teile genommen werden.
- Stammbrüche haben den Zähler 1; echte Brüche sind kleiner als 1, unechte Brüche mindestens 1 und lassen sich als gemischte Zahl schreiben.
- Bruchteile von Größen: durch den Nenner teilen, mit dem Zähler multiplizieren; $\frac{3}{4}$ von 20 sind 15.
- Am Zahlenstrahl zählt man die Teile zwischen zwei ganzen Zahlen; Brüche haben dort ihren festen Platz.
- Erweitern (mit derselben Zahl multiplizieren) und Kürzen (durch denselben Teiler teilen) ändern den Wert eines Bruchs nicht.
- Gleiche Nenner: der größere Zähler gewinnt; gleiche Zähler: der kleinere Nenner gewinnt; sonst auf gleichen Nenner erweitern.
- Jede Division ist ein Bruch: $a : b = \frac{a}{b}$, zum Beispiel $3 : 4 = \frac{3}{4}$.

Achtung

Viele sagen, $\frac{1}{3}$ sei größer als $\frac{1}{2}$, weil 3 größer als 2 ist. Bei größerem Nenner sind die Teile aber kleiner. Beim Bruchteil einer Größe wird oft nur durch den Zähler geteilt statt durch den Nenner. Beachte außerdem: $1\frac{3}{4}$ ist $\frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$, nicht $\frac{1 \cdot 3}{4}$.

Hinweis

Wichtig ist der Bezug zum Ganzen. $\frac{1}{2}$ von 10 Euro ist 5 Euro, $\frac{1}{2}$ von 100 Euro dagegen 50 Euro.

Ottos Tipp

Zeichne bei jeder Bruchaufgabe ein Rechteck und teile es in die Teile des Nenners. Dann siehst du sofort, welche Teile gemeint sind und welcher Bruch größer ist!