Lösungen - Einführung in Brüche

Klasse: Klasse 5

Lösung zu Aufgabe 1

Der Nenner sagt, in wie viele gleich große Teile das Ganze geteilt ist; der Zähler sagt, wie viele dieser Teile gemeint (gefärbt) sind.
a) Das erste Rechteck hat 8 gleiche Teile, 3 sind gefärbt: $\frac{3}{8}$. Zähler 3, Nenner 8.
b) Das zweite Rechteck hat 6 Teile, 5 sind gefärbt: $\frac{5}{6}$. Zähler 5, Nenner 6.
c) Der Kreis ist in 5 gleiche Stücke geteilt, 2 sind gefärbt: $\frac{2}{5}$.
d) Beim zweiten Rechteck ist $6 - 5 = 1$ Teil ungefärbt, also $\frac{1}{6}$. Kontrolle: $\frac{5}{6}$ und $\frac{1}{6}$ ergeben zusammen das Ganze.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Das Zahlwort vorn wird zum Zähler, das Wort mit „-tel“ oder „-stel“ bestimmt den Nenner: drei Viertel $= \frac{3}{4}$, sieben Zehntel $= \frac{7}{10}$, ein Fünftel $= \frac{1}{5}$.
b) $\frac{2}{3}$ liest man „zwei Drittel“, $\frac{5}{8}$ „fünf Achtel“, $\frac{1}{2}$ „ein Halb“.
c) Ein Stammbruch hat den Zähler 1. Von den Brüchen in b) ist das nur $\frac{1}{2}$; aus a) wäre auch $\frac{1}{5}$ ein Stammbruch.
d) Man teilt das Rechteck zum Beispiel in 3 Reihen mit je 4 Feldern, also 12 gleich große Felder, und färbt 5 davon.

Lösung zu Aufgabe 3

Methode: Zuerst durch den Nenner teilen (das ist ein Teil), dann mit dem Zähler malnehmen (so viele Teile).
a) $\frac{1}{4}$ von 20: $20 : 4 = 5$. $\frac{3}{4}$ von 20: $3 \cdot 5 = 15$.
b) $35 : 5 = 7\,\text{kg}$; $2 \cdot 7 = 14\,\text{kg}$.
c) $64 : 8 = 8$ €; $5 \cdot 8 = 40$ €.
d) Zuerst in Cent: *2\,€=200\,\mathrm{ct}*. $200 : 10 = 20\,\text{ct}$; $3 \cdot 20 = 60\,\text{ct} = 0{,}60$ €.
Antwort: 5 und 15; 14 kg; 40 €; 60 ct.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Zwischen 0 und 1 liegen 4 Viertel, zwischen 1 und 2 nochmals 4. A liegt beim dritten Strich: $\frac{3}{4}$. B beim fünften: $\frac{5}{4}$. C beim siebten: $\frac{7}{4}$.
b) Eine Einheit sind 8 cm, ein Viertel also 2 cm. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ liegt bei $2 \cdot 2 = 4$ cm, $\frac{3}{4}$ bei 6 cm, $\frac{7}{4}$ bei 14 cm.
c) $\frac{3}{4}$ liegt ein Viertel vor der 1, $\frac{5}{4}$ ein Viertel dahinter. Beide sind gleich weit von 1 entfernt: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ und $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 5

Bei einer gemischten Zahl stehen die Ganzen vor dem Bruch. Man erhält sie durch Division mit Rest.
a) $17 : 5 = 3$ Rest 2, also $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$: drei Ganze und zwei Fünftel.
b) $29 : 8 = 3$ Rest 5, also $3\frac{5}{8}$.
c) Rückwärts: 4 Ganze sind $4 \cdot 3 = 12$ Drittel, dazu 1 Drittel: $\frac{13}{3}$.
d) 2 Ganze sind 8 Viertel, dazu 3 Viertel: $\frac{11}{4}$.
Probe zu a): $3 \cdot 5 + 2 = 17$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Gleicher Nenner: Die Teile sind gleich groß, also hat der Bruch mit mehr Teilen den größeren Wert. $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$.
b) Gleicher Zähler: Man hat gleich viele Teile, aber Viertel sind größer als Achtel. $\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$.
c) Gemeinsamer Nenner 12: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. Also $\frac{2}{3}$.
d) $\frac{5}{6}$ mit 3 erweitert ergibt $\frac{15}{18}$. Die Brüche sind gleich: $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$.

Lösung zu Aufgabe 7

Erweitern: Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert. Der Wert bleibt gleich, die Teile werden kleiner, aber es sind mehr.
a) $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.
b) Vom Nenner 5 zum Nenner 20 erweitert man mit $20 : 5 = 4$: $\frac{12}{20}$.
c) $\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$.
d) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$. Bei allen ist der Zähler genau die Hälfte des Nenners.

Lösung zu Aufgabe 8

Kürzen: Zähler und Nenner werden durch denselben Teiler geteilt. Mit dem größten gemeinsamen Teiler (ggT) ist man in einem Schritt fertig.
a) 6 und 8 sind durch 2 teilbar: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
b) 12 und 18 haben den ggT 6: $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.
c) 15 und 45 haben den ggT 15: $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.
d) 20 und 50 haben den ggT 10: $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.
Kontrolle: Die Ergebnisse lassen sich nicht weiter kürzen.

Lösung zu Aufgabe 9

Der Bruchstrich ist ein Geteiltzeichen: $a : b = \frac{a}{b}$.
a) $3 : 4 = \frac{3}{4}$.
b) $7 : 2 = \frac{7}{2}$. Da $7 = 3 \cdot 2 + 1$, ist das $3\frac{1}{2}$.
c) $11 : 4 = \frac{11}{4}$. $11 = 2 \cdot 4 + 3$, also $2\frac{3}{4}$.
d) 5 Tafeln für 8 Kinder: Jede Tafel wird in 8 Teile geteilt, das ergibt 40 Teile; jedes Kind

bekommt 5 davon, also $5 : 8 = \frac{5}{8}$ einer Tafel.

Lösung zu Aufgabe 10

Eine Pizza hat 8 Stücke, jedes Stück ist $\frac{1}{8}$.
a) Mira $\frac{3}{8}$; Paul $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$; Nina $\frac{1}{8}$.
b) Gegessen wurden $3 + 2 + 1 = 6$ Stücke. Übrig bleiben 2 Stücke: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
c) Mira und Paul zusammen: 5 Stücke, $\frac{5}{8}$. Der Bruch lässt sich nicht kürzen, weil 5 und 8 keinen gemeinsamen Teiler außer 1 haben.
d) Marie isst doppelt so viel wie Nina: 2 Stücke $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Damit sind die beiden übrigen Stücke aufgegessen; es bleibt nichts.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Anna: $\frac{1}{4}$ von 24 Stücken: $24 : 4 = 6$ Stücke. Ben: $\frac{1}{3}$ von 24: $24 : 3 = 8$ Stücke.
b) Übrig: $24 - 6 - 8 = 10$ Stücke.
c) $\frac{10}{24}$, gekürzt mit 2: $\frac{5}{12}$.
d) Ben isst $8 - 6 = 2$ Stücke mehr als Anna, denn ein Drittel ist mehr als ein Viertel.
Antwort: Anna 6, Ben 8 Stücke; es bleiben 10 Stücke, also $\frac{5}{12}$ der Tafel.

Lösung zu Aufgabe 12

a) Bruchteil = Stimmen durch 24. Sport $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$; Mathe $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$; Kunst $\frac{5}{24}$ (nicht kürzbar); Deutsch $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.
b) Sport und Mathe haben $9 + 6 = 15$ Stimmen. Das sind $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ der Klasse. Alle anderen Paare ergeben andere Summen.
c) $\frac{1}{3}$ von 24: $24 : 3 = 8$ Kinder.
d) Man zeichnet ein Rechteck mit 4 Reihen zu je 6 Feldern und färbt 9 Felder. Das sind anderthalb Reihen.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\frac{3}{4}$ von 1200 m: $1200 : 4 = 300$, $3 \cdot 300 = 900\,\text{m}$ zu Fuß.
b) Mit dem Bus fährt sie den Rest: $1200 - 900 = 300\,\text{m}$. Das ist $\frac{1}{4}$ des Weges, denn $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
c) $\frac{2}{5}$ von 1200 m: $1200 : 5 = 240$, $2 \cdot 240 = 480\,\text{m}$ mit dem Rad.
d) Anna geht 900 m zu Fuß, Ben fährt 480 m mit dem Rad. Annas Teilstrecke ist um $900 - 480 = 420\,\text{m}$ länger, denn $\frac{3}{4}$ ist mehr als $\frac{2}{5}$.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\frac{3}{4}\,\text{l}$: $1000 : 4 = 250\,\text{ml}$, $3 \cdot 250 = 750\,\text{ml}$.
b) $\frac{1}{2}\,\text{kg} = 1000 : 2 = 500\,\text{g}$ Mehl; $\frac{1}{4}\,\text{kg} = 250\,\text{g}$ Butter.
c) $\frac{3}{8}\,\text{l}$: $1000 : 8 = 125\,\text{ml}$, $3 \cdot 125 = 375\,\text{ml}$.

d) Doppeltes Rezept: Mehl $2 \cdot 500 = 1000\,\text{g} = 1\,\text{kg}$. Milch $2 \cdot 750 = 1500\,\text{ml} = 1\frac{1}{2}\,\text{l}$.
Antwort: 750 ml Milch, 500 g Mehl, 250 g Butter, 375 ml Sahne; doppelt 1 kg Mehl und $1\frac{1}{2}$ l Milch.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Sparen $\frac{1}{3}$ von 24 €: $24 : 3 = 8$ €. Süßigkeiten $\frac{1}{4}$: $24 : 4 = 6$ €. Kino $\frac{1}{6}$: $24 : 6 = 4$ €.
b) Rest: $24 - 8 - 6 - 4 = 6$ €.
c) $\frac{6}{24}$, gekürzt mit 6: $\frac{1}{4}$.
d) Die Hälfte von 8 € sind 4 €. Er spart dann $8 + 4 = 12$ €.
e) $45 : 8 = 5$ Rest 5. Nach 5 Monaten hat er 40 €, das reicht nicht; nach 6 Monaten hat er 48 €. Er kann das Spiel nach 6 Monaten kaufen.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Ein Fünftel von 90 min sind 18 min, also spielte Jonas $3 \cdot 18 = 54$ min. Ein Sechstel sind 15 min, Leo spielte $5 \cdot 15 = 75$ min. Karim: $90 : 3 = 30$ min. Tim: 90 min.
b) Von lang nach kurz: Tim (90), Leo (75), Jonas (54), Karim (30).
c) Leo saß $90 - 75 = 15$ min auf der Bank, das ist $\frac{1}{6}$ des Spiels.
d) Jonas und Karim zusammen: $54 + 30 = 84$ min. Das sind 6 Minuten weniger als ein ganzes Spiel; es reicht also nicht.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $2\,\text{kg} = 2000\,\text{g}$. Äpfel $\frac{1}{2}$: 1000 g. Bananen $\frac{1}{4}$: 500 g. Trauben $\frac{1}{8}$: 250 g.
b) Orangen: $2000 - 1000 - 500 - 250 = 250\,\text{g}$. Bruchteil $\frac{250}{2000} = \frac{1}{8}$, genauso viel wie Trauben.
c) Pro Kind: $2000 : 25 = 80\,\text{g}$ Obstsalat.
d) Es sind 1000 g, also genau 1 kg Äpfel. Sie kosten 2,40 €.
Kontrolle: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Gemüse $\frac{1}{2}$ von 60: $30\,\text{m}^2$. Blumen $\frac{1}{5}$: $60 : 5 = 12\,\text{m}^2$. Kräuter $\frac{1}{10}$: $6\,\text{m}^2$.
b) Rasen: $60 - 30 - 12 - 6 = 12\,\text{m}^2$. Bruchteil $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.
c) Blumen: $12 \cdot 3 = 36$ Samentüten.
d) $36 \cdot 1{,}20 = 43{,}20$ €.
Antwort: 30, 12 und $6\,\text{m}^2$; Rasen $12\,\text{m}^2$, also ein Fünftel; Samen für 43,20 €.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Romane $\frac{3}{8}$ von 240: $240 : 8 = 30$, $3 \cdot 30 = 90$. Sachbücher $\frac{1}{4}$: 60. Comics $\frac{1}{6}$: 40.
b) Rest: $240 - 90 - 60 - 40 = 50$ Bücher.
c) $\frac{50}{240}$, gekürzt mit 10: $\frac{5}{24}$.
d) Comics: $40 + 30 = 70$ von nun $240 + 30 = 270$ Büchern. $\frac{70}{270}$, gekürzt mit 10: $\frac{7}{27}$.

Weiter kürzen geht nicht, weil 7 eine Primzahl ist und 27 nicht teilt.

Lösung zu Aufgabe 20

a) 5 Pizzen mit je 6 Stücken: $5 \cdot 6 = 30$ Stücke.
b) $30 : 6 = 5$ Stücke für jedes Kind. Ein Stück ist $\frac{1}{6}$ einer Pizza, fünf Stücke sind $\frac{5}{6}$.
c) Verteilt man 5 Ganze auf 6 Kinder, rechnet man $5 : 6$. Nach der Regel $a : b = \frac{a}{b}$ ist das $\frac{5}{6}$. Das stimmt mit b) überein.
d) 5 Pizzen kosten $5 \cdot 9{,}60 = 48$ €. Pro Kind: $48 : 6 = 8$ €.

Lösung zu Aufgabe 21

a) Auf den Nenner 12 erweitert: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ und $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$. Dazwischen liegen $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ und $\frac{5}{12}$.
b) Erweitert man beide Brüche, werden die Teile feiner, und es entstehen Brüche dazwischen. $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ und $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; dazwischen liegt $\frac{5}{8}$. Erweitert man weiter auf Sechzehntel, findet man noch mehr, zum Beispiel $\frac{9}{16}$. Das geht immer weiter.
c) Zwischen 2 und 3 liegt keine natürliche Zahl. Brüche gibt es dort dagegen unendlich viele, etwa $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$ ...