Lösungen - Achsensymmetrie und Spiegelung

Klasse: Klasse 5

Lösung zu Aufgabe 1

Wir prüfen bei jeder Figur, entlang welcher Linien man sie so falten kann, dass beide Hälften genau aufeinanderliegen.
a) Quadrat: 4 Achsen (zwei Mittellinien und zwei Diagonalen). Rechteck: nur die 2 Mittellinien; faltet man an der Diagonalen, passen die Ecken nicht aufeinander.
b) Kreis: unendlich viele Achsen, denn jeder Durchmesser ist eine Faltlinie. Gleichseitiges Dreieck: 3 Achsen, jeweils von einer Ecke zur Mitte der Gegenseite.
c) Raute: 2 Achsen, nämlich die beiden Diagonalen. Parallelogramm: keine Achse.
d) Gleichschenkliges Dreieck: 1 Achse durch die Spitze. Drachenviereck: 1 Achse, die Diagonale durch die beiden Ecken zwischen den gleich langen Seiten.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Achsensymmetrisch sind A (senkrechte Achse), H, M (senkrechte Achse) und X. Man kann sie an einer Linie falten, sodass beide Hälften übereinanderliegen.
b) H hat eine senkrechte und eine waagerechte Achse, ebenso X. Beide haben also zwei Symmetrieachsen.
c) F, S und Z haben keine Symmetrieachse. S und Z sehen nach einer halben Drehung gleich aus (punktsymmetrisch), aber das ist keine Achsensymmetrie.
d) Mit waagerechter Achse: zum Beispiel B und E, außerdem C, D und K. Die obere Hälfte ist jeweils das Spiegelbild der unteren.

Lösung zu Aufgabe 3

Merke: Bild- und Urpunkt liegen auf einer Senkrechten zur Achse und gleich weit von ihr entfernt, aber auf verschiedenen Seiten.
a) P' liegt 3 cm rechts von a, auf der Senkrechten zu a durch P.
b) , also doppelt so lang wie der Abstand zur Achse.
c) $2 \cdot 2{,}5 = 5\,\text{cm}$.
d) Ein Punkt auf der Achse hat den Abstand 0; er wird auf sich selbst abgebildet: $P' = P$. Solche Punkte heißen Fixpunkte.

Lösung zu Aufgabe 4

Bei der Achse $x = 4$ ändert sich nur der x-Wert; der y-Wert bleibt gleich.
a) $P(1|2)$ liegt $4 - 1 = 3$ Einheiten links der Achse. Das Bild liegt 3 Einheiten rechts: $x = 4 + 3 = 7$. $P'(7|2)$.
b) $Q(3|5)$ liegt 1 Einheit links: $Q'(5|5)$.
c) $R(4|1)$ liegt auf der Achse und bleibt, wo er ist: $R' = R$.

d) P und P' sind $7 - 1 = 6$ Einheiten voneinander entfernt, das ist doppelt so viel wie der Abstand zur Achse.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Jeder Punkt wird an $x = 4$ gespiegelt; der neue x-Wert ist $4 + (4 - x) = 8 - x$.
$A(1|1) \to A'(7|1)$; $B(3|1) \to B'(5|1)$; $C(2|4) \to C'(6|4)$.

b) und . Alle Seiten sind im Bild genauso lang wie im Original, denn die Spiegelung ist längentreu.

c) B liegt 1 Einheit links der Achse, B' 1 Einheit rechts; beide liegen auf derselben waagerechten Linie $y = 1$.

d) Nein. Wenn $A \to B \to C$ gegen den Uhrzeigersinn läuft, läuft $A' \to B' \to C'$ im Uhrzeigersinn. Die Spiegelung kehrt den Umlaufsinn um.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Ja. Jede Strecke hat im Spiegelbild dieselbe Länge; die Spiegelung ist längentreu. Man sieht das beim Falten: Die Hälften liegen genau aufeinander.

b) Ja. Auch Winkel liegen nach dem Falten genau aufeinander, also bleiben sie gleich groß; die Spiegelung ist winkeltreu.

c) Ja. Parallele Geraden haben überall denselben Abstand; da Längen erhalten bleiben, gilt das auch für ihre Bilder.

d) Die erste Spiegelung bringt die Figur auf die andere Seite, die zweite wieder zurück. Die Figur liegt danach genau an ihrem Ausgangsort.

Lösung zu Aufgabe 7

a) AHA: A und H sind senkrecht symmetrisch, und rückwärts gelesen steht wieder AHA. Im Spiegel sieht das Wort gleich aus. OTTO: O und T sind symmetrisch, rückwärts OTTO, also ebenfalls gleich. MAMA: Die Buchstaben sind symmetrisch, rückwärts steht aber AMAM. Im Spiegel sieht das Wort anders aus.

b) Beim Spiegeln an der senkrechten Achse wird die Reihenfolge der Buchstaben umgedreht. Deshalb muss das Wort zusätzlich rückwärts gleich lauten (ein Palindrom sein).

c) Zum Beispiel TOT und WOW.

d) Waagerechte Achsen haben B, C, D und E. Das A hat nur eine senkrechte Achse.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Die Symmetrieachse ist die Diagonale . Sie verbindet die beiden Ecken, an denen jeweils zwei gleich lange Seiten zusammenstoßen.

b) Beim Falten an AC fällt B auf D. Deshalb sind die Winkel bei B und D gleich groß.

c) $U = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 10 + 16 = 26\,\text{cm}$.

d) Bei einer Raute sind alle vier Seiten gleich lang; sie hat zwei Symmetrieachsen (beide Diagonalen). Ein Drachen hat nur zwei Paare gleich langer benachbarter Seiten und eine Achse.

Lösung zu Aufgabe 9

a) P liegt 1 cm links von a. Nach der Spiegelung liegt P_1 1 cm rechts von a.
b) Achse b liegt 3 cm rechts von a. P_1 ist also $3 - 1 = 2\,\text{cm}$ links von b. Nach der Spiegelung an b liegt P_2 2 cm rechts von b.
c) Von P bis a: 1 cm; von a bis b: 3 cm; von b bis P_2: 2 cm. Zusammen $1 + 3 + 2 = 6\,\text{cm}$, das ist $2 \cdot 3\,\text{cm}$.
d) Zwei Spiegelungen an parallelen Achsen ergeben eine Verschiebung senkrecht zu den Achsen um den doppelten Achsenabstand.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Beim Aufklappen wird die ausgeschnittene Hälfte an der Faltkante gespiegelt. Es entsteht ein ganzes Herz, das achsensymmetrisch ist.
b) Die Symmetrieachse ist die Faltkante, sie läuft genau durch die Mitte des Herzens.
c) Beim zweimaligen Falten entstehen zwei Faltlinien, die senkrecht aufeinanderstehen. Das Loch ist an beiden gespiegelt und hat deshalb höchstens 2 Symmetrieachsen (manchmal mehr, wenn die Form zufällig weitere Achsen hat, zum Beispiel ein Quadrat).
d) Die Ecke liegt an beiden Faltlinien und wird insgesamt viermal abgebildet: Es entstehen 4 gleiche Dreiecke, die zusammen eine Raute oder ein Quadrat bilden.

Lösung zu Aufgabe 11

a) 3,2 m sind 320 cm. $320 : 20 = 16$ Fliesen pro Reihe.
b) Wegen der Symmetrie liegen links und rechts gleich viele: $16 : 2 = 8$ Fliesen auf jeder Seite.
c) Bei 16 Fliesen (gerade Anzahl) gibt es keine Mittelfliese; die Mittellinie verläuft zwischen der 8. und der 9. Fliese. Soll das Muster symmetrisch sein, müssen diese beiden Fliesen dieselbe Farbe haben: 2 blaue Fliesen nebeneinander. Nur bei ungerader Anzahl gibt es eine einzelne Mittelfliese, durch die die Achse geht.
d) 4 m = 400 cm: $400 : 20 = 20$ Reihen. $16 \cdot 20 = 320$ Fliesen.

Lösung zu Aufgabe 12

Die Wasseroberfläche ist die Spiegelachse.
a) Das Spiegelbild ist genauso groß: Der Baum erscheint 12 m hoch, aber nach unten zeigend.
b) Die Spitze liegt 12 m über dem Wasser, die Spitze des Spiegelbildes 12 m darunter (wenn der Stamm auf Wasserhöhe beginnt). Abstand: $12 + 12 = 24\,\text{m}$.
c) Der Vogel ist 5 m über der Oberfläche, sein Spiegelbild erscheint 5 m darunter.
d) Abstand Vogel – Spiegelbild: $5 + 5 = 10\,\text{m}$, wieder der doppelte Abstand zur Achse.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Ein regelmäßiges Achteck hat 8 Achsen: 4 verlaufen durch gegenüberliegende Ecken, 4 durch die Mitten gegenüberliegender Seiten.

b) Das gleichseitige Dreieck hat 3 Achsen, jeweils von einer Ecke zur Mitte der Gegenseite.
c) Das Quadrat hat 4 Achsen: 2 Diagonalen und 2 Mittellinien.
d) Der Kreis hat unendlich viele Achsen, denn jede Gerade durch den Mittelpunkt ist eine Symmetrieachse. Er hat damit die meisten Achsen von allen Schildern.
Reihenfolge: Kreis, Achteck (8), Quadrat (4), Dreieck (3).

Lösung zu Aufgabe 14

Die Körpermitte des Schmetterlings ist die Symmetrieachse.
a) Eine Flügelhälfte ist halb so breit wie die Spannweite: $12 : 2 = 6\,\text{cm}$.
b) Das Spiegelbild des Flecks liegt auf dem rechten Flügel ebenfalls 2 cm von der Körpermitte entfernt, auf derselben Höhe.
c) Die beiden Flecke sind $2 + 2 = 4\,\text{cm}$ voneinander entfernt.
d) Jeder der 3 Flecken links hat rechts ein Spiegelbild: $2 \cdot 3 = 6$ Flecken. Ein Fleck genau auf der Körpermitte würde nur einmal zählen; hier liegen alle auf dem Flügel.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Die vier Eckfelder liegen völlig gleichmäßig verteilt. Das Muster hat 4 Symmetrieachsen.
b) Die senkrechte Mittellinie (zwischen Spalte 2 und 3), die waagerechte Mittellinie (zwischen Zeile 2 und 3) und die beiden Diagonalen. Bei jeder Achse wird eine Ecke auf eine andere Ecke abgebildet.
c) Das Feld $(2|2)$ liegt auf der Diagonale von $(1|1)$ nach $(4|4)$; diese Achse bleibt erhalten. An der anderen Diagonale würde es auf $(3|3)$ fallen, an der senkrechten Achse auf $(3|2)$, an der waagerechten auf $(2|3)$. Diese Felder sind nicht gefärbt, also gehen diese drei Achsen verloren.
d) Man muss $(2|3)$, $(3|2)$ und $(3|3)$ zusätzlich färben. Dann sind die vier Mittelfelder gefärbt, und alle vier Achsen sind wieder da.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Schweiz: Quadrat mit Kreuz in der Mitte. Senkrechte und waagerechte Mittellinie sowie beide Diagonalen sind Achsen: 4 Achsen.
b) Japan: Rechteck mit Kreis in der Mitte. Die waagerechte und die senkrechte Mittellinie sind Achsen: 2 Achsen. Die Diagonalen sind keine Achsen, weil das Rechteck kein Quadrat ist.
c) Deutschland: Die senkrechte Mittellinie ist die Achse; jeder Streifen wird auf sich selbst abgebildet. An der waagerechten Mittellinie würden Schwarz und Gold die Plätze tauschen, das Bild wäre anders.
d) Frankreich: Die waagerechte Mittellinie ist die Achse. An der senkrechten Mittellinie würden Blau und Rot die Plätze tauschen.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Der Fluss ist die Achse $y = 2$. $B(7|3)$ liegt 1 Einheit darüber, also liegt B' 1 Einheit

darunter: $B'(7|1)$.
b) Von $A(1|5)$ nach $B'(7|1)$ sinkt y um 4, x wächst um 6. Bis zum Fluss ($y = 2$) sinkt y um 3, das sind $\frac{3}{4}$ des Weges. $x = 1 + \frac{3}{4} \cdot 6 = 5{,}5$. Also $S(5{,}5|2)$.
c) Über S: $\sqrt{4{,}5^2 + 3^2} + \sqrt{1{,}5^2 + 1^2} \approx 5{,}4 + 1{,}8 = 7{,}2$ Einheiten, also etwa 720 m. Über $T(3|2)$: $\sqrt{2^2 + 3^2} + \sqrt{4^2 + 1^2} \approx 3{,}6 + 4{,}1 = 7{,}7$ Einheiten, also etwa 770 m. Der Weg über S ist rund 50 m kürzer.
d) S liegt auf der Spiegelachse. Die Spiegelung ist längentreu und bildet B auf B' ab, S bleibt fest. Deshalb ist . Der Weg $A \to S \to B$ ist so lang wie die gerade Strecke $A \to B'$, und eine Gerade ist die kürzeste Verbindung.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Dreieck 3, Viereck (Quadrat) 4, Fünfeck 5, Sechseck 6 Achsen.
b) Ein regelmäßiges Vieleck hat genau so viele Symmetrieachsen wie Ecken. Bei ungerader Eckenzahl geht jede Achse durch eine Ecke und die Mitte der Gegenseite; bei gerader Eckenzahl gehen die Hälfte der Achsen durch zwei Ecken, die andere Hälfte durch zwei Seitenmitten.
c) Ein regelmäßiges Zwölfeck hat 12 Achsen.
d) Alle 6 Winkel sind gleich groß: $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Dreistellige Palindrome haben die Form „aba“, zum Beispiel 101, 232 und 959.
b) Die erste Ziffer kann 1 bis 9 sein (9 Möglichkeiten), die mittlere 0 bis 9 (10 Möglichkeiten), die letzte ist festgelegt. Insgesamt $9 \cdot 10 = 90$ dreistellige Palindrome.
c) Vierstellige Palindrome haben die Form „abba“. Das kleinste ist 1001, das größte 9999.
d) Erste Ziffer 9 Möglichkeiten, zweite Ziffer 10 Möglichkeiten; die dritte und vierte sind dadurch festgelegt. Also $9 \cdot 10 = 90$ vierstellige Palindrome.

Lösung zu Aufgabe 20

a) An der Achse $x = 4$ gilt: neuer x-Wert $= 8 - x$, der y-Wert bleibt. $A(1|3) \to A'(7|3)$; $B(2|6) \to B'(6|6)$.
b) Einheiten; Einheiten.
c) Bei der Spiegelung an $x = 4$ geht A in A' über und B in B', und umgekehrt. Damit wird das ganze Viereck auf sich selbst abgebildet; die Achse $x = 4$ teilt es in zwei deckungsgleiche Hälften. Es ist also achsensymmetrisch (ein gleichschenkliges Trapez).
d) Rechteck von $(2|3)$ bis $(6|6)$: $4 \cdot 3 = 12\,\text{cm}^2$. Zwei Randdreiecke mit Grundseite 1 und Höhe 3: je $1 \cdot 3 : 2 = 1{,}5\,\text{cm}^2$. Gesamt: $12 + 1{,}5 + 1{,}5 = 15\,\text{cm}^2$.