Lernzettel - Zusammengesetzte Körper

Klasse: Klasse 10

Ein Silo ist ein Zylinder mit einer Halbkugel als Dach, ein Haus ein Quader mit einem Prisma als Dach, eine Eiswaffel ein Kegel mit einer Kugel. Solche Gegenstände berechnest du, indem du sie in bekannte Körper zerlegst.

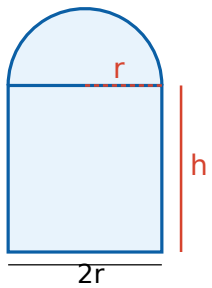
Einstieg: Ein Haus aus Bausteinen

Schau dich um: Ein Haus besteht aus einem Quader und einem Dachprisma, ein Getreidesilo aus einem Zylinder mit einem Kegel, eine Tablettenkapsel aus einem Zylinder und zwei Halbkugeln. Fast alle Gegenstände im Alltag sind zusammengesetzte Körper. Um ihr Volumen oder ihre Oberfläche zu berechnen, zerlegst du sie in die dir bekannten Grundkörper, rechnest jeden Teil einzeln und fügst die Ergebnisse passend zusammen. Wichtig ist dabei die Frage, welche Flächen innen liegen und welche man von außen sieht. In diesem Kapitel übst du das an vielen konkreten Beispielen.

Zusammengesetzte Körper

Definition: zusammengesetzter Körper

Ein **zusammengesetzter Körper** besteht aus mehreren einfachen Körpern. Du zerlegst ihn in Teilkörper, berechnest jeden einzeln und addierst oder subtrahierst die Ergebnisse.



Silo: Zylinder (Radius r, Höhe h) mit aufgesetzter Halbkugel.

Satz: Formeln der Grundkörper

- **Quader:** $V = a \cdot b \cdot c$, $O = 2(ab + ac + bc)$
- **Prisma:** $V = G \cdot h$
- **Zylinder:** $V = \pi r^2 h$, $M = 2\pi r h$, $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
- **Pyramide:** $V = \frac{1}{3} G h$, $O = G + M$
- **Kegel:** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $M = \pi r s$ mit $s = \sqrt{r^2 + h^2}$, $O = \pi r^2 + \pi r s$
- **Kugel:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $O = 4\pi r^2$

Volumen

Regel: Volumen zusammengesetzter Körper

Das Volumen ist die **Summe** der Teilvolumina, wenn die Teile aneinanderstoßen, und die **Differenz**, wenn aus einem Körper ein Stück entfernt wird (zum Beispiel eine Bohrung).

So gehst du vor: zusammengesetzten Körper berechnen

1. Skizziere den Körper und beschrifte alle gegebenen Längen.
2. Zerlege ihn in Teilkörper, die du kennst.
3. Berechne fehlende Längen, zum Beispiel die Mantellinie s, mit Pythagoras.
4. Rechne jedes Teilvolumen oder jede Teilfläche aus und entscheide: addieren oder subtrahieren?
5. Gib das Ergebnis mit Einheit und sinnvoller Rundung an.

Beispiel 1: Silo

Ein Zylinder mit $r = 2$ m und $h = 6$ m trägt eine Halbkugel mit $r = 2$ m. Berechne das Volumen.

Zylinder: $V_Z = \pi \cdot 4 \cdot 6 = 24\pi$. Halbkugel: $V_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{16}{3}\pi$.

Insgesamt $V = \frac{88}{3}\pi \approx 92{,}15\ \text{m}^3$.

Beispiel 2: Haus mit Satteldach

Der Quader ist 8 m lang, 6 m breit und 3 m hoch. Das Dach ist ein dreieckiges Prisma mit Dreiecksgrundseite 6 m, Dreieckshöhe 2 m und Länge 8 m.

Quader: $V_Q = 8 \cdot 6 \cdot 3 = 144\ \text{m}^3$. Dach: $V_P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 8 = 48\ \text{m}^3$.

Gesamtvolumen: **192 m³**.

Beispiel 3: Körper mit Bohrung

Ein Quader $10 \times 10 \times 5$ cm hat eine durchgehende Bohrung mit $r = 2$ cm.

$V = 500 - \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 500 - 20\pi \approx 437{,}17\ \text{cm}^3$.

Beispiel 4: Hohlzylinder

Ein Betonrohr ist 2 m lang, außen $r = 0{,}5$ m, innen $r = 0{,}4$ m. Wie groß ist das Betonvolumen?

$V = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 2 - \pi \cdot 0{,}4^2 \cdot 2 = \pi \cdot 2 \cdot (0{,}25 - 0{,}16) = 0{,}18\pi \approx 0{,}565\ \text{m}^3$. Mit der Dichte

$2{,}4\ \mathrm{t/m^3}$ wiegt es etwa 1,36 t.

Oberfläche

Satz: Oberfläche zusammengesetzter Körper

Flächen, an denen die Teilkörper zusammenstoßen, gehören nicht zur Außenhaut und fallen weg. Beim Silo zählen Zylindermantel, Halbkugelfläche und Bodenkreis, nicht aber der Deckelkreis, auf dem die Halbkugel sitzt.

Beispiel 5: Oberfläche des Silos

Berechne die Oberfläche des Silos aus Beispiel 1.

Zylindermantel $2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi$. Halbkugelfläche $\frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 4 = 8\pi$. Bodenkreis $\pi \cdot 4 = 4\pi$. Zusammen $O = 36\pi \approx 113{,}10\ \mathrm{m^2}$.

Die Formeln der Grundkörper im Überblick

Die folgende Tabelle fasst die Formeln zusammen, die du für zusammengesetzte Körper brauchst. Prismen und Zylinder haben die Form „Grundfläche mal Höhe“, bei Pyramide und Kegel kommt der Faktor $\frac{1}{3}$ hinzu. Merke dir, dass die Mantellinie s eines Kegels mit dem Satz des Pythagoras aus Radius und Höhe folgt und dass die Seitenhöhe einer Pyramide die Höhe der Seitendreiecke ist.

Körper	Volumen	Oberfläche
Quader	$V = a \cdot b \cdot c$	$O = 2(ab + ac + bc)$
Prisma	$V = G \cdot h$	$O = 2G + M$
Zylinder	$V = \pi r^2 h$	$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} G h$	$O = G + M$
Kegel	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	$O = \pi r^2 + \pi r s$
Kugel	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	$O = 4\pi r^2$

r = 4 mm

l = 14 mm

Beispiel 8: Eine Tablettenkapsel

Eine Kapsel besteht aus einem Zylinder (Länge 14 mm, Radius 4 mm) und zwei aufgesetzten Halbkugeln gleichen Radius. Berechne Volumen und Oberfläche.

Die beiden Halbkugeln ergeben zusammen eine Kugel mit $r = 4$ mm. Das Volumen ist $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 14 + \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 \approx 703{,}7 + 268{,}1 = 971{,}8$ mm³. Bei der Oberfläche zählen die Kreisflächen zwischen Zylinder und Halbkugeln nicht, denn sie liegen innen. Es bleiben der Zylindermantel und die Kugeloberfläche:
$O = 2\pi \cdot 4 \cdot 14 + 4\pi \cdot 4^2 \approx 351{,}9 + 201{,}1 = 553{,}0$ mm².

Beispiel 9: Quader mit zylindrischer Bohrung

Ein Metallquader (20 cm lang, 10 cm breit, 8 cm hoch) hat eine senkrechte, durchgehende Bohrung mit dem Durchmesser 4 cm. Berechne Volumen und Oberfläche.

Das Volumen ist die Differenz: $V = 20 \cdot 10 \cdot 8 - \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 1600 - 100{,}5 = 1499{,}5$ cm³. Bei der Oberfläche fallen oben und unten je ein Kreis weg, dafür kommt die Innenwand der Bohrung hinzu:
$O = 2(200 + 160 + 80) - 2\pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 8 \approx 880 - 25{,}1 + 100{,}5 = 955{,}4$ cm². Man darf das Wegfallen der Kreise nicht vergessen.

Achtung: Typische Fehler

Erstens: Berechne bei der Oberfläche nur die sichtbaren Außenflächen. Flächen, an denen zwei Teilkörper zusammenstoßen, gehören nicht dazu. Zweitens: Verwechsle nicht die Höhe h des Kegels mit der Mantellinie s. Drittens: Achte auf den Radius: Ist der Durchmesser angegeben, halbiere ihn. Viertens: Rechne am Ende die Einheiten um: $1\,\mathrm{m}^3 = 1000$ Liter, $1\,\mathrm{dm}^3 = 1$ Liter, $1\,\mathrm{cm}^3 = 1$ ml. Fünftens: Beim Subtrahieren eines Hohlraums muss die Innenfläche zur Oberfläche addiert werden.

Pyramiden und Prismen auf dem Haus

Viele Dächer sind Prismen (Satteldach) oder Pyramiden (Zeltdach). Die Neigung des Dachs kennst du aus der Trigonometrie. Für das Volumen des Dachraums zählt nur der Körper über dem Quader. Für die Dachfläche, zum Beispiel für die Ziegel, brauchst du die Länge des Sparrens, die du mit dem Satz des Pythagoras aus halber Breite und Dachhöhe erhältst. Bei der Pyramide ist die Seitenhöhe $h_s = \sqrt{h^2 + (a/2)^2}$ die entscheidende Größe.

Beispiel 10: Haus mit Pyramidendach

Ein Turmhaus hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge 8 m, die Wandhöhe beträgt 5 m, das pyramidenförmige Dach hat die Höhe 3 m. Berechne das Gesamtvolumen und die Dachfläche.

Der Quader hat $V_1 = 8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$ m³, die Pyramide $V_2 = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 3 = 64$ m³. Insgesamt sind es 384 m³. Die Seitenhöhe der Pyramide ist $h_s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m. Jedes der vier Dreiecke hat die Fläche $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$ m², die Dachfläche beträgt also 80 m².

Einheiten, Dichte und Kosten

In Sachaufgaben interessiert meist nicht das Volumen allein, sondern eine Folgegröße: wie viele Liter in einen Tank passen, wie schwer ein Werkstück ist oder wie viel Farbe man braucht. Für Umrechnungen gilt: 1 Liter sind 1000 cm³, ein Kubikmeter sind 1000 Liter. Die Masse berechnest du als Produkt aus Volumen und Dichte. Stahl hat etwa 7,85 g/cm³, Aluminium 2,7 g/cm³, Wasser 1 g/cm³. Für Farbe, Folie oder Fliesen brauchst du die Oberfläche, und du musst sinnvoll aufrunden, weil man nur ganze Dosen oder Rollen kauft.

Beispiel 11: Hohlkugel

Eine Kugelschale aus Metall hat den Außenradius 6 cm und den Innenradius 5 cm. Wie viel Metall steckt darin, und wie schwer ist sie bei der Dichte 7,85 g/cm³?

Das Metallvolumen ist die Differenz der Kugelvolumina: $V = \frac{4}{3}\pi(6^3 - 5^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 91 \approx 381{,}2$ cm³. Die Masse beträgt $381{,}2 \cdot 7{,}85 \approx 2992$ g, also etwa 3 kg. Die Rechnung $\frac{4}{3}\pi\,(6-5)^3$ wäre falsch, denn Kugelvolumina wachsen mit der dritten Potenz des Radius und lassen sich nicht über die Differenz der Radien berechnen.

Hinweis: Wann ist ein Ergebnis plausibel?

Vergleiche dein Ergebnis mit einer einfachen Schätzung. Eine Tonne mit 80 cm Durchmesser und 90 cm Höhe passt in einen Würfel von 0,8 m Kantenlänge, hat also weniger als 576 Liter, und dein Ergebnis von etwa 450 Litern liegt im erwarteten Bereich. Ein Ergebnis wie 45 000 Liter wäre sofort als Fehler zu erkennen. Kontrolliere auch, ob die Oberfläche wirklich größer ist als jede einzelne Teilfläche.

Beispiel 12: Blumentopf als Kegelstumpf

Ein Blumentopf hat oben den Radius 10 cm, unten den Radius 6 cm und die Höhe 16 cm. Berechne sein Volumen.

Der Topf ist ein Kegelstumpf. Du ergänzt ihn gedanklich zu einem vollständigen Kegel und subtrahierst den fehlenden kleinen Kegel. Mit dem Strahlensatz verhalten sich die Höhen wie die Radien: Die Ergänzung hat die Höhe x mit $\frac{x}{x+16} = \frac{6}{10}$. Daraus folgt $10x = 6x + 96$, also $x = 24$ cm. Der große Kegel hat die Höhe 40 cm, der kleine 24 cm. Das Volumen des Topfs ist $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 40 - \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 24 = \frac{1}{3}\pi(4000 - 864) \approx 3284$ cm³, das sind etwa 3,3 Liter Erde.

Auch Prismen mit einer unregelmäßigen Grundfläche lassen sich nach der Formel „Grundfläche mal Höhe“ berechnen. Du zerlegst die Grundfläche in Rechtecke, Dreiecke und Halbkreise, addierst deren Flächeninhalte und multiplizierst mit der Höhe. Dieses Vorgehen funktioniert bei einem Tunnel mit Rechteck und Halbkreis im Querschnitt ebenso wie bei einem Zeltdach oder einem Schwimmbecken mit schrägem Boden. Die Oberfläche setzt sich dann aus zwei Grundflächen und dem Mantel zusammen, dessen Breite dem Umfang der Grundfläche entspricht.

So gehst du vor: Zusammengesetzte Körper berechnen

1. Zeichne eine Skizze und zerlege den Körper in Grundkörper.
2. Notiere für jeden Teil die gegebenen Maße; berechne fehlende Größen (Radius, Mantellinie, Seitenhöhe) mit dem Satz des Pythagoras.
3. Volumen: Addiere die Volumina der Teile oder subtrahiere ausgeschnittene Teile.
4. Oberfläche: Addiere nur die Außenflächen, lasse Verbindungsflächen weg und addiere Innenflächen von Hohlräumen.
5. Rechne in die gewünschte Einheit um und schreibe einen Antwortsatz.

Wusstest du? Archimedes und die Kugel im Zylinder

Der griechische Mathematiker Archimedes entdeckte vor über 2200 Jahren, dass eine Kugel genau zwei Drittel des Volumens des Zylinders hat, der sie umschließt (Zylinderhöhe gleich Kugeldurchmesser). Er war darauf so stolz, dass er sich diese Figur auf seinen Grabstein wünschte. Mit der Formel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ kannst du es nachrechnen: Der Zylinder hat $\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, und $\frac{4}{3} : 2 = \frac{2}{3}$.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Zusammengesetzte Körper zerlegst du in Grundkörper (Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel) und berechnest jeden Teil einzeln.
- Volumen: Teilvolumina addieren; ausgeschnittene Teile (Bohrungen, Hohlräume) subtrahieren.
- Oberfläche: nur Außenflächen zählen; Verbindungsflächen entfallen; die Innenwand eines Hohlraums kommt hinzu.
- Zylinder $V = \pi r^2 h$, Kegel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, Kugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, Pyramide $V = \frac{1}{3}Gh$, Prisma $V = Gh$.
- Mantellinie des Kegels $s = \sqrt{r^2 + h^2}$, Mantel $M = \pi r s$; Seitenhöhe der Pyramide mit Pythagoras.
- Einheiten: $1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$, $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{l}$, $1\,\mathrm{cm}^3 = 1\,\mathrm{ml}$; Flächen $1\,\mathrm{m}^2 = 10\,000\,\mathrm{cm}^2$.
- Dichte: Masse = Volumen · Dichte (zum Beispiel Stahl $7{,}85\ \frac{g}{cm^3}$).
- Immer: Skizze, Radius statt Durchmesser einsetzen, Plausibilität prüfen, Antwortsatz mit Einheit.

Achtung

Bei Kegel und Pyramide den Faktor $\frac{1}{3}$ nicht vergessen. Bei der Kegeloberfläche die Mantellinie s statt der Höhe h nehmen. Innere Berührflächen nicht mitrechnen. Aus dem Durchmesser $d = 10$ cm folgt $r = 5$ cm.

Merke: Einheiten umrechnen

$1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{l}$ und $1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l} = 1000\,\mathrm{cm}^3$; außerdem $1\,\mathrm{cm}^3 = 1\,\mathrm{ml}$.

Rechne vor dem Einsetzen alle Längen in dieselbe Einheit um. Das Gewicht ist Volumen mal Dichte.

Hinweis

Bei Sachaufgaben fragst du dich zuerst: Ist das Volumen (Füllmenge, Gewicht, Material) oder die Oberfläche (Farbe, Blech, Verpackung) gesucht? Prüfe zum Schluss, ob das Ergebnis zur Größe des Körpers passt: Ein Silo mit 2 m Radius fasst nicht tausend Kubikmeter.

Beispiel 6: Eistüte

Eine Eiswaffel ist ein Kegel mit $r = 3$ cm und $h = 10$ cm, darauf liegt eine Halbkugel mit $r = 3$ cm. Wie viel Eis passt hinein (Volumen)?

Kegel: $V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 10 = 30\pi$. Halbkugel: $V_H = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 18\pi$.

Zusammen $V = 48\pi \approx 150{,}8\ \text{cm}^3$, also etwa 151 ml.

Beispiel 7: Prisma als Dach

Ein Zelt hat die Form eines dreieckigen Prismas: Grundseite 2 m, Dreieckshöhe 1,5 m, Länge 3 m. Wie groß ist das Volumen?

$V = G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5\ \text{m}^3$.

Hinweis

Zerlege jeden zusammengesetzten Körper in Quader, Prismen, Zylinder, Pyramiden, Kegel und Kugeln. Das Volumen ergibt sich aus der Summe oder Differenz der Teilvolumina. Bei der Oberfläche zählt nur die Außenhaut. Rechne in einheitlichen Einheiten und runde am Ende.

Ottos Tipp

Mache eine Skizze und male jeden Teilkörper in einer anderen Farbe an. Schreibe dann für jeden Teil eine Zeile mit Formel und Ergebnis. So verlierst du keinen Teil und siehst sofort, welche Flächen wegfallen.