Lösungen - Zusammengesetzte Körper

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) Quader: $V = 72$ cm³, $O = 2(24 + 18 + 12) = 108$ cm². Zylinder: $V = \pi \cdot 25 \cdot 8 \approx 628{,}3$ cm³; $O = 2\pi \cdot 25 + 2\pi \cdot 5 \cdot 8 \approx 408{,}4$ cm². Beim Quader ist die Oberfläche die Summe der drei verschiedenen Rechteckflächen, jeweils doppelt. Beim Zylinder kommen zwei Kreise und der Mantel $2\pi rh$ zusammen.
b) $s = \sqrt{9 + 16} = 5$ cm. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 \approx 37{,}7$ cm³; $O = \pi \cdot 9 + \pi \cdot 3 \cdot 5 \approx 75{,}4$ cm². Radius, Höhe und Mantellinie bilden ein rechtwinkliges Dreieck; danach gilt $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ und $O = \pi r^2 + \pi r s$.
c) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 \approx 904{,}8$ cm³; $O = 4\pi \cdot 36 \approx 452{,}4$ cm². Man setzt $r = 6$ cm in $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2$ ein.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $c = \sqrt{36 + 64} = 10$ cm. Die Hypotenuse der Grundfläche wird für die dritte Seitenfläche des Prismas gebraucht.
b) $G = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ cm²; $V = 24 \cdot 12 = 288$ cm³. Die Grundfläche ist ein halbes Rechteck aus den Katheten; Volumen gleich Grundfläche mal Höhe.
c) $M = (6 + 8 + 10) \cdot 12 = 288$ cm²; $O = 2 \cdot 24 + 288 = 336$ cm². Der Mantel besteht aus drei Rechtecken; man multipliziert den Umfang der Grundfläche mit der Höhe und addiert zwei Grundflächen.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $s = \sqrt{36 + 64} = 10$ cm. Radius und Höhe sind die Katheten, die Mantellinie ist die Hypotenuse.
b) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 8 \approx 301{,}6$ cm³. Antwort: Der Kegel hat ein Volumen von etwa 301,6 cm³.
c) $M = \pi \cdot 6 \cdot 10 \approx 188{,}5$ cm²; $O = M + \pi \cdot 36 \approx 301{,}6$ cm². Für die Oberfläche addiert man die Grundkreisfläche 36π zum Mantel 60π.
d) $\frac{36\pi}{96\pi} = 0{,}375$, also $37{,}5\,\%$. Man teilt die Grundfläche durch die Oberfläche; π kürzt sich heraus.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$ cm³. Grundfläche $10^2 = 100$ cm² mal Höhe, durch 3.
b) $h_s = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ cm. Die Höhe und die halbe Grundkante (5 cm) sind die Katheten.
c) $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 260$ cm²; $O = 100 + 260 = 360$ cm². Der Mantel besteht aus vier Dreiecken mit Grundseite 10 cm und Höhe h_s.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $V = 480 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot 10 = 480 + 120 = 600$ m³. Das Haus wird in Quader und Dachprisma zerlegt; das Dachprisma hat ein Dreieck mit Grundseite 8 m und Höhe 3 m als Grundfläche. Antwort: 600 m³.
b) $s = \sqrt{16 + 9} = 5$ m; Dachfläche $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$ m². Halbe Hausbreite (4 m) und Dachhöhe (3 m) liefern die Sparrenlänge; das Dach besteht aus zwei Rechtecken.
c) Rechteckwände $2 \cdot (10 \cdot 6) + 2 \cdot (8 \cdot 6) = 216$ m²; zwei Giebeldreiecke $2 \cdot 12 = 24$ m²; zusammen 240 m². Zu den vier Rechteckwänden kommen die beiden Giebeldreiecke $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ m².
d) $100 \cdot 28 = 2800$ €. Antwort: Die Dacheindeckung kostet 2800 €.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $V = \pi \cdot 2{,}25 \cdot 4 + \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}25 \cdot 2 \approx 32{,}99$ m³. Das Silo wird in Zylinder und Kegel zerlegt; beide Volumina werden addiert.
b) $s = \sqrt{2{,}25 + 4} = 2{,}5$ m; $M_Z = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 4 \approx 37{,}70$, $M_K = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 \approx 11{,}78$, zusammen $\approx 49{,}5$ m². Da das Silo oben offen ist, braucht man nur den Zylindermantel und den Kegelmantel.
c) $33{,}0 \cdot 0{,}75 \approx 24{,}7$ t. Volumen mal 0,75 t pro m³. Antwort: Das Silo fasst etwa 24,7 t Getreide.
d) $\frac{49{,}5 \cdot 2}{6} \approx 16{,}5$ Liter. Bei zwei Anstrichen verdoppelt sich die Fläche; dann teilt man durch die Ergiebigkeit.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $V = \pi \cdot 16 \cdot 14 + \frac{4}{3}\pi \cdot 64 \approx 971{,}8$ mm³. Die beiden Halbkugeln bilden zusammen eine ganze Kugel; man addiert Zylinder und Kugel.
b) $O = 2\pi \cdot 4 \cdot 14 + 4\pi \cdot 16 \approx 552{,}9$ mm². Die Oberfläche besteht aus Zylindermantel und Kugeloberfläche; die Kreisflächen des Zylinders liegen innen und zählen nicht.
c) Halbe Füllung: etwa 0,49 ml. 20 ml Pulver reichen für etwa 41 Kapseln. Man rechnet mm³ in ml um (1000 mm³ = 1 ml) und teilt die Pulvermenge durch die Füllmenge einer Kapsel.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Würfel 1000 cm³; Bohrung $\pi \cdot 4 \cdot 10 \approx 125{,}7$ cm³. Die Bohrung ist ein Zylinder mit Radius 2 cm und Länge 10 cm.
b) $V \approx 874{,}3$ cm³. Das Restvolumen ist Würfel minus Bohrung.
c) $O = 600 - 2\pi \cdot 4 + 2\pi \cdot 2 \cdot 10 \approx 700{,}5$ cm². Von der Würfeloberfläche fallen zwei Kreise weg, dafür kommt die Innenwand der Bohrung (Zylindermantel) hinzu.
d) $m \approx 874{,}3 \cdot 7{,}85 \approx 6864$ g, also etwa 6,9 kg. Masse gleich Volumen mal Dichte.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $A = \pi(36 - 25) = 11\pi \approx 34{,}6$ cm². Die Querschnittsfläche ist großer Kreis minus

kleiner Kreis.
b) $V = 11\pi \cdot 100 \approx 3456$ cm³; $m \approx 27{,}1$ kg. Volumen gleich Querschnitt mal Länge (100 cm); mal Dichte ergibt die Masse in Gramm.
c) Außen $2\pi \cdot 6 \cdot 100 \approx 3770$ cm²; innen $2\pi \cdot 5 \cdot 100 \approx 3142$ cm². Außen- und Innenfläche sind jeweils Zylindermäntel.
d) $\approx 0{,}69$ m². Man addiert die Flächen und rechnet in m² um (10000 cm² = 1 m²).

Lösung zu Aufgabe 10

a) $A = \frac{1{,}2+2{,}0}{2} \cdot 10 = 16$ m². Die Seitenwand ist ein Trapez mit den parallelen Seiten 1,2 m und 2,0 m und der Höhe 10 m.
b) $V = 16 \cdot 5 = 80$ m³ $= 80\,000$ Liter. Das Becken ist ein Prisma mit dem Trapez als Grundfläche und der Breite 5 m als Höhe.
c) $\frac{80\,000}{400} = 200$ min, das sind 3 h 20 min. Man teilt die Wassermenge durch die Pumpleistung.
d) Boden $\sqrt{100 + 0{,}64} \cdot 5 \approx 50{,}2$ m²; Seitenwände $2 \cdot 16 = 32$ m²; Stirnwände $1{,}2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 16$ m²; insgesamt $\approx 98{,}2$ m². Der schräge Boden ist mit Pythagoras etwas länger als 10 m; man addiert alle Innenflächen.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 10 \approx 94{,}2$ cm³. Kegelvolumen mit $r = 3$ cm und $h = 10$ cm.
b) $V_H = \frac{2}{3}\pi \cdot 27 \approx 56{,}5$ cm³. Eine Halbkugel hat das halbe Kugelvolumen, also $\frac{2}{3}\pi r^3$.
c) $s = \sqrt{109} \approx 10{,}44$; $M = \pi \cdot 3 \cdot 10{,}44 \approx 98{,}4$ cm²; Halbkugel $2\pi \cdot 9 \approx 56{,}5$ cm². Für den Waffelmantel braucht man die Mantellinie aus Pythagoras.
d) $50 \cdot 56{,}5 \approx 2827$ cm³, also etwa 2,8 Liter. Man multipliziert das Volumen einer Eiskugel mit 50 und rechnet in Liter um.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $V = \pi \cdot 9 \cdot 2 + \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 \approx 94{,}2$ cm³. Zylinder und Kegel haben denselben Radius; ihre Volumina werden addiert.
b) $m \approx 94{,}2 \cdot 0{,}6 \approx 56{,}5$ g. Masse gleich Volumen mal Dichte.
c) Deckel $\pi \cdot 9 \approx 28{,}3$; Zylindermantel $2\pi \cdot 3 \cdot 2 \approx 37{,}7$; Kegelmantel $\pi \cdot 3 \cdot 5 \approx 47{,}1$ ($s = 5$); zusammen $\approx 113{,}1$ cm². Sichtbar sind der Deckel, der Zylindermantel und der Kegelmantel; die Mantellinie ist $\sqrt{9 + 16} = 5$ cm.
d) $h = \frac{94{,}25}{9\pi} \approx 3{,}33$ cm. Ein Zylinder mit gleichem Volumen und Radius 3 cm hätte diese Höhe.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $V = \pi \cdot 40^2 \cdot 90 \approx 452{,}4$ Liter. Man rechnet in cm³ und dann in Liter um (1000 cm³ = 1 l).
b) $60 \cdot 25 = 1500$ Liter. Dachfläche mal Wassermenge pro m².
c) $\frac{1500}{452{,}4} \approx 3{,}32$, also 4 Tonnen. Man muss aufrunden, damit alles Wasser aufgefangen

wird.
d) $h = \frac{300\,000}{\pi \cdot 1600} \approx 59{,}7$ cm. Man stellt die Zylinderformel nach der Höhe um.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $V = 19{,}8 \cdot 13{,}2 \cdot 12 \approx 3136{,}3$ cm³. Quadervolumen: Länge mal Breite mal Höhe.
b) $6 \cdot \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 12 \approx 2463{,}3$ cm³. Sechs gleiche Zylinder.
c) Luft $\approx 673{,}1$ cm³, das sind $\approx 21{,}5\,\%$ des Kartons. Die Luft ist die Differenz der Volumina; man bezieht sie auf das Kartonvolumen.
d) Eine Kugel füllt den umgebenden Würfel nur zu $\frac{\pi}{6} \approx 52{,}4\,\%$; fast die Hälfte wäre Luft. Zylinderdosen nutzen den Platz deshalb besser aus als Kugeln.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $V = \pi \cdot 9 \cdot 18 + \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 \approx 546{,}6$ m³. Zylindervolumen plus Kegelvolumen.
b) $s = \sqrt{9 + 16} = 5$ m. Radius und Dachhöhe sind die Katheten.
c) $M_Z = 2\pi \cdot 3 \cdot 18 \approx 339{,}3$ m²; $M_K = \pi \cdot 3 \cdot 5 \approx 47{,}1$ m²; zusammen $\approx 386{,}4$ m². Die Außenfläche besteht aus Zylindermantel und Kegelmantel; der Boden wird nicht gestrichen.
d) $\frac{386{,}4 \cdot 2}{6} \approx 128{,}8$ Liter. Bei zwei Anstrichen verdoppelt sich die Fläche; dann teilt man durch 6 m² pro Liter.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $V = 12 \cdot 6 \cdot 1{,}5 + \frac{1}{2}\pi \cdot 9 \cdot 12 \approx 277{,}6$ m³. Das Gewächshaus ist ein Quader mit aufgesetztem Halbzylinder.
b) $M = \pi \cdot 3 \cdot 12 \approx 113{,}1$ m². Die gewölbte Dachfläche ist der halbe Zylindermantel $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l$.
c) Dach $113{,}1$; zwei Halbkreise $\pi \cdot 9 \approx 28{,}3$; Seitenwände $2 \cdot 12 \cdot 1{,}5 = 36$; Stirnrechtecke $2 \cdot 6 \cdot 1{,}5 = 18$; zusammen $\approx 195{,}4$ m². Zur Folienfläche gehören Dach, die beiden Halbkreise und alle senkrechten Wände; der Boden nicht.
d) $195{,}4 \cdot 2{,}40 \approx 469$ €. Fläche mal Preis pro m².

Lösung zu Aufgabe 17

a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 12 \approx 314{,}2$ cm³. Kegelvolumen; 1 cm³ entspricht 1 ml.
b) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}25 \cdot 6 \approx 39{,}3$ cm³. Bei halber Höhe ist auch der Radius halb so groß.
c) $\frac{1}{8} = 12{,}5\,\%$, denn alle Längen halbieren sich und das Volumen wird mit $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ multipliziert. Volumina ähnlicher Körper wachsen mit der dritten Potenz des Streckfaktors.
d) $\left(\frac{h}{12}\right)^3 = \frac{1}{2}$: $h = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} \approx 9{,}52$ cm. Für das halbe Volumen muss der Streckfaktor die dritte Wurzel aus $\frac{1}{2}$ sein.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Würfel 1000; Kugel $\frac{4}{3}\pi \cdot 125 \approx 523{,}6$; Zylinder $\pi \cdot 25 \cdot 10 \approx 785{,}4$ (cm³). Man setzt jeweils $r = 5$ cm bzw. die Kante 10 cm in die Formeln ein.
b) $\frac{523{,}6}{1000} \approx 52{,}4\,\%$. Man teilt das Kugelvolumen durch das Würfelvolumen.
c) $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V_Z = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$; $\frac{V_K}{V_Z} = \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}$. Der Zylinder hat die Höhe $2r$; das Verhältnis 2 zu 3 ist unabhängig vom Radius (Archimedes).
d) $1000 - 523{,}6 \approx 476{,}4$ cm³, etwa 47,6 %. Der Rest ist Würfel minus Kugel.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ Würfel. Man addiert die Würfelzahlen der vier Schichten.
b) $30 \cdot 27 = 810$ cm³. Ein Würfel hat $3^3 = 27$ cm³.
c) Draufsicht: 16 Quadrate $\cdot 9 = 144$ cm². Jede Seitenansicht: $(4 + 3 + 2 + 1) \cdot 9 = 90$ cm²; vier Seiten 360 cm². Zusammen 504 cm². Von oben sieht man 16 Quadrate, von jeder Seite die Treppe mit $4 + 3 + 2 + 1$ Quadraten; jedes Quadrat hat 9 cm².
d) Mit Boden $504 + 144 = 648$ cm²; $\frac{648}{6} = 108$ ml. Mit Boden kommen noch einmal 16 Quadrate dazu; dann teilt man durch die Ergiebigkeit.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 9 \approx 339{,}3$ cm³. Kegelvolumen $\frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 9 = 108\pi$.
b) $h = \frac{108\pi}{9\pi} = 12$ cm. Das Volumen bleibt beim Umgießen gleich; man teilt durch die Grundfläche 9π des Zylinders.
c) Ja, er läuft über, denn $12 > 10$. Es fehlen 2 cm Höhe, das sind $2 \cdot 9\pi \approx 56{,}5$ cm³. Die Wasserhöhe übersteigt die Zylinderhöhe; der Überlauf ist ein Zylinder von 2 cm Höhe.
d) Dann wäre $h = \frac{108\pi}{36\pi} = 3$ cm, das Wasser stünde nur noch ein Drittel so hoch. Bei doppeltem Radius vervierfacht sich die Grundfläche, deshalb sinkt die Höhe auf ein Viertel.