Lösungen zur Klassenarbeit - Trigonometrie in allgemeinen Dreiecken

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt $180°$: $\gamma = 180° - 50° - 60° = 70°$ (1 P.).
b) Gegeben ist das vollständige Paar aus Seite $c = 8$ cm und Gegenwinkel $\gamma = 70°$, deshalb hilft der Sinussatz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Umgestellt:
$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{8 \cdot \sin 50°}{\sin 70°} \approx \frac{8 \cdot 0{,}766}{0{,}940} \approx 6{,}52$ cm (1,5 P.).
c) Ebenso für die Seite gegenüber β: $b = \frac{8 \cdot \sin 60°}{\sin 70°} \approx \frac{6{,}928}{0{,}940} \approx 7{,}37$ cm (1,5 P.).
Plausibilitätskontrolle: Dem größten Winkel γ liegt die längste Seite $c = 8$ cm gegenüber, dem kleinsten Winkel α die kürzeste Seite $a \approx 6{,}52$ cm. Antwort: $\gamma = 70°$, $a \approx 6{,}52$ cm, $b \approx 7{,}37$ cm.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS). Der Sinussatz hilft hier nicht, man braucht den Kosinussatz:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 50°$ (1 P.). Mit $\cos 50° \approx 0{,}643$:
$c^2 \approx 100 - 61{,}71 = 38{,}29$ (1 P.), also $c \approx 6{,}19$ cm (0,5 P.).
b) Die Flächenformel mit eingeschlossenem Winkel lautet $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Sie folgt aus $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$, denn die Höhe auf a ist $b \cdot \sin\gamma \approx 6{,}13$ cm.
$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 50° \approx 24 \cdot 0{,}766 \approx 18{,}39\,\text{cm}^2$ (1,5 P.). Kontrolle: Für $\gamma = 90°$ ergäbe der Kosinussatz den Pythagoras mit $c = 10$ cm; bei $50°$ muss c kürzer sein, das passt.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Der größte Winkel liegt der längsten Seite gegenüber, hier γ gegenüber $c = 9$.
Kosinussatz nach dem Winkel umgestellt: $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 49 - 81}{84} = \frac{4}{84} \approx 0{,}0476$ (1 P.). Also $\gamma \approx 87{,}3°$, knapp unter einem rechten Winkel (1 P.).
b) Für α gegenüber $a = 6$: $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 81 - 36}{126} = \frac{94}{126} \approx 0{,}746$, $\alpha \approx 41{,}8°$ (1 P.).
c) $\beta = 180° - 87{,}3° - 41{,}8° \approx 51{,}0°$ (1 P.). Kontrolle mit dem Kosinussatz:
$\cos\beta = \frac{36 + 81 - 49}{108} \approx 0{,}630$, also $\beta \approx 51{,}0°$, übereinstimmend. Vorteil des Kosinussatzes bei drei gegebenen Seiten: Er liefert auch stumpfe Winkel eindeutig, während der Sinussatz dort zwei mögliche Winkel zuließe. Antwort: $\gamma \approx 87{,}3°$, $\alpha \approx 41{,}8°$, $\beta \approx 51{,}0°$.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Im Dreieck ABC sind die Winkel bei A und B bekannt: $\gamma = 180° - 48° - 75° = 57°$ (1 P.).
b) Bekannt ist die Seite $AB = 150$ m mit ihrem Gegenwinkel γ, also passt der

Sinussatz. AC liegt dem Winkel $\beta = 75^\circ$ bei B gegenüber:
$AC = \frac{150 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 57^\circ} \approx \frac{150 \cdot 0{,}966}{0{,}839} \approx 172{,}8$ m (1,5 P.).
c) BC liegt dem Winkel $\alpha = 48^\circ$ bei A gegenüber: $BC = \frac{150 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 57^\circ} \approx \frac{111{,}5}{0{,}839} \approx 132{,}9$ m (1,5 P.). Kontrolle: Zum größten Winkel 75° gehört die längste Seite AC. Bedeutung des Verfahrens: Man kann die Entfernung zum Baum bestimmen, ohne den Fluss zu überqueren. Antwort: $\gamma = 57^\circ$, $AC \approx 172{,}8$ m, $BC \approx 132{,}9$ m.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Hafen und die beiden Schiffspositionen bilden ein Dreieck mit den Seiten 12 km und 18 km und dem eingeschlossenen Winkel 75°. Gesucht ist die dritte Seite, also Kosinussatz (1 P.):
$d^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos 75^\circ = 144 + 324 - 432 \cdot 0{,}2588 \approx 468 - 111{,}8 = 356{,}2$ (1 P.). Damit $d = \sqrt{356{,}2} \approx 18{,}87$ km (1 P.).
b) Die Summe der beiden Fahrstrecken ist $12 + 18 = 30$ km. Der direkte Abstand ist um $30 - 18{,}87 \approx 11{,}13$ km kürzer (1 P.). Das passt zur Dreiecksungleichung: Jede Dreiecksseite ist kürzer als die Summe der beiden anderen. Bei einem Kurswinkel von 180° wäre der Abstand genau 30 km. Antwort: Die Schiffe sind etwa $18{,}87$ km voneinander entfernt, rund $11{,}13$ km weniger als die Summe der Fahrstrecken.