Lernzettel - Trigonometrie in allgemeinen Dreiecken

Klasse: Klasse 10

Mit dem Satz des Pythagoras und den Winkelfunktionen berechnest du rechtwinklige Dreiecke. Viele Dreiecke aus der Praxis haben aber keinen rechten Winkel, zum Beispiel beim Vermessen von Grundstücken. Dafür brauchst du den Sinussatz und den Kosinussatz.

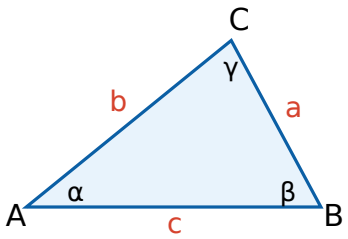
Einstieg: Wie breit ist der See?

Zwischen zwei Ufern liegt ein See, und du möchtest wissen, wie weit ein Boot in der Mitte vom einen Ufer entfernt ist. Du kannst nicht hinüberlaufen, aber du kannst am Ufer zwei Punkte abstecken, ihren Abstand messen und das Boot von beiden Punkten aus anpeilen. Damit kennst du eine Seite und zwei Winkel eines Dreiecks. Mit Pythagoras kommst du nicht weiter, denn das Dreieck ist nicht rechtwinklig. In diesem Kapitel lernst du den Sinussatz und den Kosinussatz kennen, mit denen sich jedes Dreieck berechnen lässt, und die Flächenformel mit dem Sinus.

Bezeichnungen

Definition: Bezeichnungen im Dreieck

Die Seite a liegt gegenüber von A (Winkel α), b gegenüber von B (Winkel β) und c gegenüber von C (Winkel γ). Die Winkelsumme ist $180°$, die größte Seite liegt gegenüber vom größten Winkel.



Der Sinussatz

Satz: Sinussatz

In jedem Dreieck gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Du nutzt ihn bei **zwei Winkeln und einer Seite** (WSW, WWS) oder bei **zwei Seiten**

und dem Gegenwinkel der größeren Seite (SsW).

Beispiel 1: WSW

Gegeben: $\alpha = 40°$, $\beta = 65°$, $a = 8$ **cm. Berechne** b**.**

$\gamma = 180° - 40° - 65° = 75°$. Dann $b = \dfrac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{8 \cdot \sin 65°}{\sin 40°} \approx 11{,}28$ cm.

Beispiel 2: SsW

Gegeben: $a = 12$, $b = 10$, $\alpha = 50°$**. Berechne** β**.**

$\sin\beta = \dfrac{10 \cdot \sin 50°}{12} \approx 0{,}638$, also $\beta \approx 39{,}7°$. Weil b ist, kommt nur dieser spitze Winkel infrage.

Achtung

Ist der gegebene Winkel der Gegenwinkel der *kleineren* Seite, können zwei Dreiecke entstehen, weil $\sin\beta = \sin(180° - \beta)$ gilt. Prüfe beide Winkel mit der Winkelsumme. Stelle den Taschenrechner auf DEG.

Der Kosinussatz

Satz: Kosinussatz

Der Kosinussatz verallgemeinert den Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Analog gelten $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ und $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$. Für $\gamma = 90°$ ist $\cos\gamma = 0$, und du erhältst den Satz des Pythagoras. Du nutzt ihn bei **zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel** (SWS) oder bei **drei Seiten** (SSS).

Beispiel 3: SWS

Gegeben: $a = 7$, $b = 9$, $\gamma = 60°$**. Berechne** c**.**

$c^2 = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 60° = 130 - 63 = 67$, also $c \approx 8{,}19$.

Beispiel 4: SSS

Gegeben: $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$**. Berechne** γ**.**

Nach $\cos\gamma$ umgestellt: $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{25 + 36 - 49}{60} = 0{,}2$. Mit der

Umkehrfunktion folgt $\gamma \approx 78{,}5^\circ$. Ist der Kosinus negativ, ist der Winkel stumpf.

Achtung

Rechne beim Kosinussatz zuerst den Term $2ab\cos\gamma$ aus und ziehe ihn dann ab. Rechne nicht $(a^2+b^2-2ab)\cos\gamma$. Der Winkel γ liegt gegenüber von c und wird von a und b eingeschlossen.

Flächeninhalt und Auswahl des Satzes

Satz: Flächeninhalt

Bei zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel gilt $A = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin\gamma$. Das ist $A = \frac{1}{2}\,g\,h$ mit der Höhe $h = b\sin\gamma$. Für $a = 8$, $b = 10$, $\gamma = 30^\circ$: $A = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot 0{,}5 = 20$.

So gehst du vor: den passenden Satz wählen

1. Ist ein Seitenpaar mit seinem Gegenwinkel gegeben (z. B. a und α): **Sinussatz**.
2. Sind zwei Seiten und der Winkel dazwischen gegeben: **Kosinussatz**.
3. Sind alle drei Seiten gegeben: **Kosinussatz**, nach dem Kosinus umgestellt.
4. Sind zwei Winkel gegeben: berechne zuerst den dritten mit der Winkelsumme 180°.

Beispiel 5: Entfernung über einen See

Die Standlinie AB ist 200 m lang. Von A misst man $\alpha = 75^\circ$, von B $\beta = 60^\circ$ zum Punkt C. Wie weit ist AC?

$\gamma = 45^\circ$ und $AC = b = \dfrac{200\cdot\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 244{,}9$ m. Probe: $BC = \dfrac{200\cdot\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 273{,}2$ m liegt gegenüber vom größten Winkel 75°. Das passt.

Hinweis

Zeichne die Höhe h auf die Seite c. Mit $h = b\sin\alpha = a\sin\beta$ erhältst du den Sinussatz. Für den Kosinussatz zerlegst du c in zwei Teilstrecken und wendest Pythagoras an. Wer die Herleitung kennt, vergisst die Formeln nicht.

Beispiel 6: Fläche mit Sinus

Ein Dreieck hat $a = 9$, $b = 12$ und $\gamma = 40^\circ$. Berechne den Flächeninhalt und die dritte Seite.

$A = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12\cdot\sin 40^\circ \approx 34{,}7$.

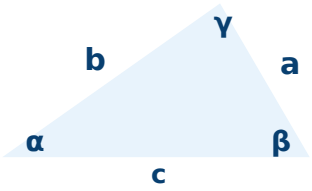
$c^2 = 81 + 144 - 2\cdot 9\cdot 12\cdot\cos 40^\circ \approx 225 - 165{,}5 = 59{,}5$, also $c \approx 7{,}71$.

Merke: Anwendungen

Förster, Landvermesser und Bauingenieure nutzen Sinus- und Kosinussatz, um Entfernungen zu bestimmen, die man nicht direkt messen kann, zum Beispiel die Breite eines Flusses oder den Abstand zu einem Berggipfel. Man misst eine Standlinie zwischen zwei Punkten und peilt von beiden Punkten das Ziel an. So erhält man zwei Winkel und eine Seite (WSW), und der Sinussatz liefert den Rest.

Welchen Satz brauche ich?

Ein Dreieck ist durch drei passende Angaben eindeutig bestimmt. Welcher Satz zum Einsatz kommt, hängt davon ab, welche Angaben gegeben sind. Die Bezeichnungen sind einheitlich: Die Seite a liegt dem Winkel α gegenüber, b dem Winkel β und c dem Winkel γ. Die Buchstaben in den Kürzeln stehen für Seite (S) und Winkel (W), wobei ein kleines „s“ die längere Seite meint.

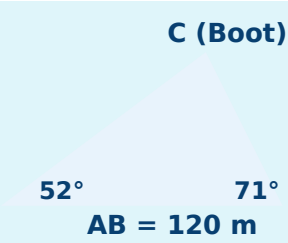


Gegeben	Kürzel	erster Schritt
zwei Winkel und eine Seite	WSW oder SWW	dritten Winkel mit der Winkelsumme, dann Sinussatz
zwei Seiten und der gegenüberliegende Winkel der längeren Seite	SsW	Sinussatz für den zweiten Winkel
zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel	SWS	Kosinussatz für die dritte Seite
drei Seiten	SSS	Kosinussatz für einen Winkel

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°. Mit zwei bekannten Winkeln ergibt sich der dritte sofort. Nach dem Sinussatz verhalten sich die Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel. Der Kosinussatz verallgemeinert den Satz des Pythagoras: Beim rechten Winkel ist $\cos 90^\circ = 0$ und der zusätzliche Term verschwindet.

Beispiel 7: Vermessung eines Sees

Zwei Punkte A und B am Ufer sind 120 m voneinander entfernt. Ein Boot C wird von A unter 52° und von B unter 71° angepeilt (Winkel gegen die Strecke AB). Wie weit ist das Boot von A entfernt?



Der Winkel bei C ist $\gamma = 180^\circ - 52^\circ - 71^\circ = 57^\circ$. Die gesuchte Strecke AC ist die Seite b, die dem Winkel $\beta = 71^\circ$ gegenüberliegt. Nach dem Sinussatz gilt $\frac{b}{\sin 71^\circ} = \frac{120}{\sin 57^\circ}$, also $b = \frac{120 \cdot \sin 71^\circ}{\sin 57^\circ} \approx \frac{120 \cdot 0{,}9455}{0{,}8387} \approx 135{,}3$ m. Das Boot ist rund 135 m von A entfernt.

Beispiel 8: Zwei Schiffe

Zwei Schiffe verlassen gleichzeitig einen Hafen. Schiff 1 fährt 15 km, Schiff 2 fährt 20 km in eine Richtung, die mit der ersten einen Winkel von 60° bildet. Wie weit sind sie dann voneinander entfernt?

Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS). Der Kosinussatz liefert $d^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos 60^\circ = 225 + 400 - 300 = 325$. Also ist $d = \sqrt{325} \approx 18{,}03$ km. Bei 90° wären es genau 25 km (Pythagoras), bei 60° ist der Abstand kleiner.

Beispiel 9: Winkel aus drei Seiten

Ein Dreieck hat die Seiten $a = 5$, $b = 6$ und $c = 7$. Berechne den Winkel γ.

Der Kosinussatz nach $\cos\gamma$ umgestellt: $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{25+36-49}{60} = 0{,}2$. Also $\gamma = \cos^{-1}(0{,}2) \approx 78{,}5^\circ$. Weitere Winkel: $\cos\alpha = \frac{36+49-25}{84} \approx 0{,}714$ liefert $\alpha \approx 44{,}4^\circ$, und $\beta = 180^\circ - 78{,}5^\circ - 44{,}4^\circ \approx 57{,}1^\circ$. Die längste Seite liegt dem größten Winkel gegenüber.

Achtung: Der Fall SsW kann zwei Lösungen haben

Der Sinussatz liefert aus $\sin\beta = k$ zwei mögliche Winkel: $\beta_1 = \sin^{-1} k$ und $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$. Ist die gegebene Gegenseite die kleinere Seite (zum Beispiel $a = 8$ mit $\alpha = 40^\circ$), dann sind meist beide Lösungen möglich, sofern $\alpha + \beta_2$ gilt. Das ergibt zwei verschiedene Dreiecke. Ist dagegen die Seite gegenüber dem gegebenen Winkel die längere, gibt es nur die spitze Lösung. Prüfe daher immer, ob der zweite Winkel zur Winkelsumme passt. Weitere Fehler: der Taschenrechner steht nicht auf DEG, oder Seite und Winkel werden verwechselt.

Beispiel 10: Fläche eines Grundstücks

Ein dreieckiges Grundstück hat die Seiten 40 m und 55 m, die einen Winkel von 70° einschließen. Wie groß ist die Fläche?

Mit der Flächenformel $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ folgt $A = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 55 \cdot \sin 70^\circ \approx 1100 \cdot 0{,}9397 \approx 1033{,}7$ m². Die Formel ist die Verallgemeinerung von $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$: Die Höhe auf die Seite a beträgt $h = b \cdot \sin\gamma$.

Woher kommen die Sätze?

Beide Sätze lassen sich aus dem rechtwinkligen Dreieck herleiten. Zeichne in ein beliebiges Dreieck die Höhe h_c auf die Seite c ein. Sie teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Dort gilt $h_c = b \cdot \sin\alpha$ und $h_c = a \cdot \sin\beta$. Gleichsetzen ergibt $b\sin\alpha = a\sin\beta$, also $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$: der Sinussatz. Für den Kosinussatz schreibst du die Seite c als Summe zweier Abschnitte, $c = b\cos\alpha + a\cos\beta$, und wendest in beiden Teildreiecken den Satz des Pythagoras auf die Höhe an. Nach etwas Umformen bleibt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ übrig. Wichtig ist die Folgerung: Sinus und Kosinus gelten für *alle* Winkel zwischen 0° und 180°, nicht nur für spitze. Bei einem stumpfen Winkel ist der Kosinus negativ, und der Term $-2ab\cos\gamma$ wird positiv, sodass die dritte Seite größer wird als im rechtwinkligen Fall.

Beispiel 11: Stumpfer Winkel

In einem Dreieck sind $a = 6$, $b = 8$ und $\gamma = 120^\circ$ gegeben. Berechne c.

Der Kosinussatz liefert $c^2 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 100 - 96 \cdot (-0{,}5) = 148$. Also ist $c = \sqrt{148} \approx 12{,}17$. Im rechtwinkligen Fall wäre $c = 10$. Der stumpfe Winkel macht die Seite länger. Wer das Vorzeichen des Kosinus übersieht und $100 - 48 = 52$ rechnet, erhält die unmögliche Länge $c \approx 7{,}2$ und erkennt den Fehler am Plausibilitätscheck: Die Seite gegenüber dem größten Winkel muss die längste sein.

So gehst du vor: Dreiecksaufgaben lösen

1. Zeichne eine Skizze und beschrifte a, b, c und α, β, γ einheitlich.
2. Schreibe die gegebenen und gesuchten Größen auf und ordne den Fall zu (WSW, SsW, SWS, SSS).
3. Wähle den Satz und setze genau ein. Beim Kosinussatz zuerst die Seite oder den Winkel isolieren.
4. Berechne die übrigen Größen mit der Winkelsumme oder erneut mit einem Satz.
5. Prüfe: Winkelsumme 180°, längste Seite gegenüber größtem Winkel, Antwortsatz mit Einheit.

Anwendungen in Vermessung und Navigation

Die Dreiecksberechnung ist das Grundverfahren der Landvermessung. Man misst eine Standlinie sehr genau und bestimmt alle weiteren Punkte durch Winkelmessungen. Dieses Verfahren heißt Triangulation. Auch in der Seefahrt, im Flugverkehr und beim GPS werden Entfernungen aus Winkeln und Seiten berechnet. Bei jeder Aufgabe zeichnest du zuerst eine Skizze, beschriftest Seiten und Winkel einheitlich und entscheidest dann anhand der

gegebenen Größen, welchen Satz du brauchst. Ein Navigationsgerät im Auto arbeitet nach demselben Prinzip: Es kennt die Abstände zu mehreren Satelliten und berechnet daraus deinen Standort. Auch ein Architekt, der die Neigung eines Dachs plant, ein Förster, der die Höhe eines Baums schätzt, und eine Pilotin, die ihren Kurs korrigiert, nutzen Sinus- und Kosinussatz. Das Wissen aus diesem Kapitel ist also nicht nur für die Prüfung nützlich, sondern öffnet dir den Weg zu vielen praktischen Berufen. Übe deshalb möglichst viele verschiedene Fälle, denn die Entscheidung für den richtigen Satz fällt mit etwas Routine sehr leicht. Kontrolliere jedes Ergebnis zusätzlich mit einer Skizze im Maßstab.

Wusstest du? Wie wurde Deutschland vermessen?

Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß leitete im frühen 19. Jahrhundert die Vermessung des Königreichs Hannover. Mit Spiegeln, die das Sonnenlicht über viele Kilometer zu fernen Messpunkten warfen, bestimmte er Winkel zwischen Bergspitzen und Türmen. Aus einer einzigen genau gemessenen Basislinie und vielen Winkeln berechnete er mit dem Sinussatz ein Netz aus Dreiecken über das ganze Land. Die Methode war so genau, dass moderne Satelliten sie nur um wenige Meter verbessern konnten.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Bezeichnung: a liegt α gegenüber, b liegt β gegenüber, c liegt γ gegenüber; $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
- Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$; gebraucht bei WSW, SWW und SsW.
- Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (SWS); umgestellt $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ (SSS).
- Der Kosinussatz verallgemeinert den Satz des Pythagoras ($\cos 90^\circ = 0$).
- Fläche: $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.
- SsW kann zwei Lösungen haben: $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$; prüfe, ob $\alpha + \beta_2$ gilt.
- Die längste Seite liegt dem größten Winkel gegenüber.
- Rechner auf DEG stellen, Skizze anfertigen, Antwortsatz mit Einheit schreiben.

Achtung

Rechne mit allen Stellen des Taschenrechners und runde Zwischenergebnisse nicht zu früh. Bei $\sin\beta = 0{,}9$ denke an den stumpfen Winkel $180^\circ - \beta$.

Ottos Tipp

Beschrifte zuerst dein Dreieck und schreibe auf, was gegeben und was gesucht ist. Dann entscheidest du in zehn Sekunden: Habe ich ein Paar aus Seite und Gegenwinkel? Dann Sinussatz. Sonst Kosinussatz. Und am Ende prüfe: Die größte Seite liegt immer gegenüber vom größten Winkel.