Arbeitsblatt - Trigonometrie in allgemeinen Dreiecken

Klasse: Klasse 10 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Winkelsumme und Sinussatz

In einem Dreieck sind $\alpha = 40°$, $\beta = 65°$ und $c = 10$ cm gegeben.

a) Berechne den Winkel γ.
b) Berechne die Seite a.
c) Berechne die Seite b.
d) Prüfe, ob die längste Seite dem größten Winkel gegenüberliegt.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Gegenseite bekannt (SsW)

Gegeben sind $a = 12$ cm, $b = 10$ cm und $\alpha = 50°$.

a) Berechne β mit dem Sinussatz.
b) Begründe, warum es nur eine Lösung gibt.
c) Berechne γ und c.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Kosinussatz: Seite berechnen

Gegeben sind $a = 7$ cm, $b = 9$ cm und $\gamma = 60°$.

a) Berechne die Seite c.
b) Berechne α mit dem Sinussatz.
c) Berechne β und prüfe die Winkelsumme.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Kosinussatz: Winkel berechnen

Ein Dreieck hat die Seiten $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.

a) Berechne γ.
b) Berechne α.
c) Berechne β und die Fläche des Dreiecks.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Welcher Satz zuerst?

Entscheide für jeden Fall, welchen Satz du zuerst brauchst, und nenne die gesuchte Größe des ersten Schritts.

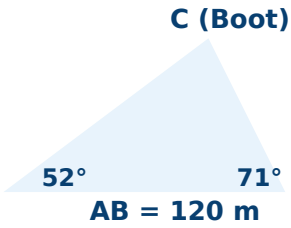
Fall	Gegeben	Satz zuerst
a)	$a = 7$, $b = 9$, $\gamma = 60^\circ$	?
b)	$\alpha = 40^\circ$, $\beta = 65^\circ$, $c = 10$	?
c)	$a = 5$, $b = 6$, $c = 7$	?
d)	$a = 12$, $b = 10$, $\alpha = 50^\circ$	?

a) Fall a) und c)
b) Fall b)
c) Fall d)

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Vermessung eines Sees

Zwei Messpunkte A und B am Ufer eines Sees sind 120 m voneinander entfernt. Ein Boot C wird von A unter 52° und von B unter 71° angepeilt.



a) Berechne den Winkel γ beim Boot.
b) Wie weit ist das Boot von A entfernt?
c) Wie weit ist das Boot von B entfernt?
d) Wie weit ist das Boot vom Ufer entfernt (Abstand von der Strecke AB)?

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Die Höhe des Funkmastes

Von einem Punkt A aus wird die Spitze eines Funkmastes unter dem Höhenwinkel 28° gesehen. Nach 30 m Annäherung in Richtung Mast (Punkt B) beträgt der Höhenwinkel 41°.

a) Berechne den Winkel an der Mastspitze im Dreieck ABT.
b) Berechne die Entfernung BT von B zur Spitze.
c) Berechne die Höhe des Mastes.
d) Wie weit steht der Punkt B vom Fuß des Mastes?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Zwei Schiffe

Zwei Schiffe verlassen gleichzeitig denselben Hafen. Schiff 1 fährt 15 km, Schiff 2 fährt 20 km. Die Fahrtrichtungen schließen den Winkel φ ein.

Winkel φ	60°	90°	120°
Abstand	?	?	?

a) Berechne den Abstand für $\varphi = 60^\circ$.
b) Berechne den Abstand für $\varphi = 90^\circ$.
c) Berechne den Abstand für $\varphi = 120^\circ$.
d) Wie ändert sich der Abstand, wenn der Winkel größer wird?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Die Fläche mit dem Sinus

Berechne die Flächen der Dreiecke mit $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

a) $a = 8$ cm, $b = 11$ cm, $\gamma = 35^\circ$
b) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm (zuerst γ berechnen)
c) Ein gleichseitiges Dreieck mit Seite 10 cm

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Das dreieckige Grundstück

Ein Grundstück hat die Form eines Dreiecks. Zwei Seiten sind 40 m und 55 m lang und schließen einen Winkel von 70° ein. Der Bodenrichtwert beträgt 80 € pro m². Es soll rundherum ein Zaun gesetzt werden.

a) Berechne die Fläche.
b) Berechne die dritte Seite.
c) Berechne die Länge des Zauns.
d) Berechne den Wert des Grundstücks.

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Flug mit Kursänderung

Ein Flugzeug fliegt 300 km nach Norden, ändert dann den Kurs um 40° nach Osten und fliegt weitere 200 km.

a) Welchen Winkel schließen die beiden Flugstrecken im Dreieck zum Startpunkt ein?
b) Wie weit ist das Flugzeug dann vom Startpunkt entfernt?
c) Wie viel Kilometer hätte es mit dem direkten Rückflug im Vergleich zum Hinweg über den Umweg gespart?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Zwei Lösungen

Gegeben sind $a = 8$ cm, $b = 10$ cm und $\alpha = 40^\circ$ (SsW mit der kürzeren Gegenseite).

a) Berechne β_1 und β_2.
b) Berechne zu jeder Lösung γ und c.
c) Zeichne beide Dreiecke gedanklich und erkläre, warum es zwei gibt.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Das Parallelogramm

Ein Parallelogramm hat die Seiten 6 cm und 9 cm und einen Winkel von 70°.

a) Berechne die kürzere Diagonale (gegenüber dem Winkel 70°).
b) Berechne die längere Diagonale (Nebenwinkel 110°).
c) Berechne die Fläche des Parallelogramms.
d) Prüfe mit der Formel $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Der Dachbinder

Ein symmetrisches Satteldach hat die Spannweite 8 m, die Sparrenlänge beträgt 5 m.

a) Berechne den Winkel an der Traufe.
b) Berechne den Winkel an der Firstspitze mit dem Kosinussatz.
c) Berechne die Höhe des Daches.
d) Prüfe die Winkelsumme.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Der Tunnel durch den Berg

Zwischen zwei Orten A und B soll ein Tunnel durch einen Berg gebohrt werden. Von einem Messpunkt C aus misst man $CA = 420$ m, $CB = 510$ m und den Winkel $\gamma = 72^\circ$ bei C. Die Tunnelbohrmaschine schafft 8 m pro Tag.

a) Berechne die Länge des Tunnels.
b) Wie viele Tage dauert die Bohrung?
c) Berechne die Winkel bei A und bei B.
d) Wie lang wäre die Umgehungsstraße über C?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Segel

Ein dreieckiges Segel hat die Seiten 4,2 m und 3,6 m, die einen Winkel von 80° einschließen. Das Segeltuch kostet 38 € pro m².

a) Berechne die Fläche des Segels.
b) Berechne die dritte Seite.
c) Berechne die Kosten des Tuchs.
d) Welchen Winkel schließt die dritte Seite mit der 4,2-m-Seite ein?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Das Viereckgrundstück

Ein Grundstück $ABCD$ wird durch die Diagonale $AC = 60$ m in zwei Dreiecke geteilt: $AB = 40$ m, $BC = 50$ m und $CD = 45$ m, $DA = 35$ m.

a) Berechne den Winkel $\angle ABC$ mit dem Kosinussatz.
b) Berechne die Fläche des Dreiecks ABC.
c) Berechne den Winkel $\angle CDA$ und die Fläche des Dreiecks ACD.
d) Berechne die Gesamtfläche des Grundstücks.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Der Schatten am Hang

Ein 15 m hoher Mast steht am Fuß eines Hanges, der vom Mast weg mit 12° ansteigt. Die Sonne steht 35° über der Waagerechten, ihre Strahlen fallen in Richtung des Hanges.

a) Berechne die Winkel im Dreieck aus Mastfuß, Mastspitze und Schattenende.
b) Berechne die Länge des Schattens auf dem Hang.
c) Wie groß wäre der Schatten auf ebenem Boden?
d) Warum ist der Schatten am Hang länger?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Der Umkreis

Nach dem erweiterten Sinussatz gilt $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, wobei R der Radius des Umkreises ist.

a) Ein Dreieck hat $a = 10$ cm und $\alpha = 30^\circ$. Berechne R.
b) Berechne R für das Dreieck mit $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ (zuerst α berechnen).
c) Wie groß ist R bei einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c? Begründe mit $\gamma = 90^\circ$.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Stumpfwinkliges Dreieck

Ein Dreieck hat die Seiten $a = 7$, $b = 9$ und $c = 12$. Es ist stumpfwinklig.

a) Berechne den größten Winkel γ mit dem Kosinussatz.
b) Berechne α und β mit dem Sinussatz.
c) Prüfe die Winkelsumme.
d) Berechne die Fläche und vergleiche mit der Heron-Formel

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$.