Lösungen - Trigonometrie in allgemeinen Dreiecken

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\gamma = 180^\circ - 40^\circ - 65^\circ = 75^\circ$. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°.
b) $a = \frac{10 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 6{,}65$ cm. Nach dem Sinussatz gilt $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$; man löst nach a auf.
c) $b = \frac{10 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 9{,}38$ cm. Gleicher Ansatz mit $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.
d) Die größte Seite ist $c = 10$ cm gegenüber $\gamma = 75^\circ$, dem größten Winkel. Das stimmt. Auch die kürzeste Seite a liegt dem kleinsten Winkel α gegenüber; die Ergebnisse sind also stimmig.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\sin \beta = \frac{10 \cdot \sin 50^\circ}{12} \approx 0{,}6384$, $\beta \approx 39{,}7^\circ$. Man stellt den Sinussatz $\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}$ nach $\sin \beta$ um und wendet $\sin^{-1}$ an.
b) Die zweite Lösung $\beta_2 \approx 140{,}3^\circ$ ist unmöglich, denn $50^\circ + 140{,}3^\circ > 180^\circ$. Außerdem ist b, also β. Zu einem Sinuswert gibt es immer zwei Winkel zwischen 0° und 180°; hier passt nur der spitze.
c) $\gamma \approx 180^\circ - 50^\circ - 39{,}7^\circ = 90{,}3^\circ$; $c = \frac{12 \sin \gamma}{\sin 50^\circ} \approx 15{,}66$ cm. Den dritten Winkel liefert die Winkelsumme, die dritte Seite wieder der Sinussatz. Das Dreieck ist fast rechtwinklig.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $c^2 = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ = 130 - 63 = 67$, $c \approx 8{,}19$ cm. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind gegeben (SWS), deshalb beginnt man mit dem Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$; $\cos 60^\circ = 0{,}5$.
b) $\sin \alpha = \frac{7 \cdot \sin 60^\circ}{8{,}185} \approx 0{,}7406$, $\alpha \approx 47{,}8^\circ$. Nun kennt man ein Paar aus Seite und Gegenwinkel und kann den Sinussatz benutzen. α ist spitz, weil a nicht die längste Seite ist.
c) $\beta = 180^\circ - 60^\circ - 47{,}8^\circ = 72{,}2^\circ$. Summe $= 180^\circ$. Den dritten Winkel liefert die Winkelsumme; sie dient zugleich als Kontrolle.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $\cos \gamma = \frac{25 + 36 - 49}{60} = 0{,}2$, $\gamma \approx 78{,}5^\circ$. Bei drei gegebenen Seiten stellt man den Kosinussatz nach $\cos\gamma$ um: $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Ein positiver Kosinus bedeutet einen spitzen Winkel.
b) $\cos \alpha = \frac{36 + 49 - 25}{84} \approx 0{,}714$, $\alpha \approx 44{,}4^\circ$. Gleiche Umstellung für α mit der Gegenseite a.
c) $\beta \approx 180^\circ - 78{,}5^\circ - 44{,}4^\circ = 57{,}1^\circ$. Fläche $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 78{,}5^\circ \approx 14{,}70$. Für die Fläche nimmt man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel: $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) a) SWS: Kosinussatz für c. c) SSS: Kosinussatz für einen Winkel. Bei SWS und SSS fehlt ein Paar aus Seite und Gegenwinkel, deshalb hilft nur der Kosinussatz.
b) b) WSW: Winkelsumme für $\gamma = 75^\circ$, dann Sinussatz für a und b. Bei WSW kennt man nach der Winkelsumme alle Winkel und kann jede Seite mit dem Sinussatz berechnen.
c) d) SsW: Sinussatz für $\sin\beta$ (und Prüfung auf zwei Lösungen). Bei SsW kennt man ein vollständiges Paar; man muss prüfen, ob es zwei Lösungen gibt.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\gamma = 57^\circ$. Die Winkelsumme liefert den Winkel am Boot: $180^\circ - 52^\circ - 71^\circ$.
b) $AC = \frac{120 \sin 71^\circ}{\sin 57^\circ} \approx 135{,}3$ m. AC liegt dem Winkel bei B gegenüber; Sinussatz mit dem Paar AB und γ. Antwort: $AC \approx 135$ m.
c) $BC = \frac{120 \sin 52^\circ}{\sin 57^\circ} \approx 112{,}8$ m. BC liegt dem Winkel bei A gegenüber. Antwort: $BC \approx 113$ m.
d) $h = AC \cdot \sin 52^\circ \approx 106{,}6$ m. Der Abstand vom Ufer ist die Höhe auf AB; im rechtwinkligen Teildreieck ist sie die Gegenkathete des Winkels bei A. Antwort: Das Boot ist etwa 107 m vom Ufer entfernt.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Im Dreieck: bei A 28°, bei B $180^\circ - 41^\circ = 139^\circ$, bei T $180^\circ - 28^\circ - 139^\circ = 13^\circ$. Der Winkel bei B im Dreieck ABT ist der Nebenwinkel des Höhenwinkels 41°.
b) $BT = \frac{30 \sin 28^\circ}{\sin 13^\circ} \approx 62{,}6$ m. Sinussatz im Dreieck ABT: Die Seite BT liegt dem Winkel bei A gegenüber.
c) $h = BT \sin 41^\circ \approx 41{,}1$ m. Im rechtwinkligen Dreieck mit der Spitze ist h die Gegenkathete von 41°. Antwort: Der Mast ist etwa 41 m hoch.
d) $BT \cos 41^\circ \approx 47{,}3$ m. Der waagerechte Abstand von B zum Mastfuß ist die Ankathete.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $d = \sqrt{225 + 400 - 600 \cos 60^\circ} = \sqrt{325} \approx 18{,}03$ km. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: Kosinussatz mit $\cos 60^\circ = 0{,}5$.
b) $d = \sqrt{625} = 25$ km. Bei 90° ist $\cos 90^\circ = 0$; der Kosinussatz wird zum Satz des Pythagoras.
c) $d = \sqrt{625 + 300} = \sqrt{925} \approx 30{,}41$ km. Bei 120° ist der Kosinus negativ ($-0{,}5$), deshalb wird addiert.
d) Der Abstand wächst mit dem Winkel; bei 180° wäre er $15 + 20 = 35$ km. Bei 0° wäre der Abstand nur $20 - 15 = 5$ km.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 11 \cdot \sin 35^\circ \approx 25{,}24$ cm². Die Formel gilt für zwei Seiten und den

eingeschlossenen Winkel.
b) $\gamma \approx 78{,}46^\circ$; $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 78{,}46^\circ \approx 14{,}70$ cm². Zuerst wird γ mit dem Kosinussatz bestimmt ($\cos\gamma = 0{,}2$), dann die Flächenformel angewendet.
c) $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ \approx 43{,}30$ cm². Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel 60°; das Ergebnis stimmt mit $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ überein.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $A = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 55 \cdot \sin 70^\circ \approx 1033{,}7$ m². Die beiden Seiten schließen 70° ein, also gilt die Flächenformel mit dem Sinus. Antwort: etwa 1034 m².
b) $c^2 = 1600 + 3025 - 2 \cdot 40 \cdot 55 \cdot \cos 70^\circ \approx 3120{,}1$, $c \approx 55{,}86$ m. Die dritte Seite liefert der Kosinussatz.
c) $u \approx 40 + 55 + 55{,}86 \approx 150{,}9$ m. Der Zaun ist der Umfang des Dreiecks. Antwort: etwa 151 m Zaun.
d) $1033{,}7 \cdot 80 \approx 82\,693$ €. Fläche mal Bodenrichtwert. Antwort: Das Grundstück ist etwa 82700 € wert.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Der Innenwinkel ist $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Eine Kursänderung um 40° bedeutet, dass der Innenwinkel des Dreiecks der Nebenwinkel ist.
b) $d^2 = 300^2 + 200^2 - 2 \cdot 300 \cdot 200 \cdot \cos 140^\circ \approx 221\,925$, $d \approx 471{,}1$ km. Kosinussatz mit dem stumpfen Winkel; $\cos 140^\circ$ ist negativ, deshalb wird der letzte Term addiert. Antwort: etwa 471 km.
c) Hinweg 500 km, Luftlinie ≈ 471 km: Ersparnis $\approx 28{,}9$ km. Die Luftlinie ist etwas kürzer als der geflogene Weg von 500 km.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\sin\beta = \frac{10 \sin 40^\circ}{8} \approx 0{,}8035$; $\beta_1 \approx 53{,}5^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 126{,}5^\circ$. Weil die Gegenseite a kürzer als b ist, gibt es zu $\sin\beta$ zwei mögliche Winkel; beide sind mit $\alpha = 40^\circ$ verträglich.
b) Lösung 1: $\gamma_1 \approx 86{,}5^\circ$, $c_1 \approx 12{,}42$ cm. Lösung 2: $\gamma_2 \approx 13{,}5^\circ$, $c_2 \approx 2{,}90$ cm. Zu jeder Lösung liefert die Winkelsumme γ und der Sinussatz c.
c) Die Seite $a = 8$ ist kürzer als $b = 10$ und kann den freien Schenkel des Winkels an zwei Stellen treffen. Beide Dreiecke erfüllen alle Angaben. Man nennt diesen Fall mehrdeutig; eine Skizze mit dem Zirkel um C zeigt beide Schnittpunkte.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $e^2 = 36 + 81 - 108\cos 70^\circ \approx 80{,}06$, $e \approx 8{,}95$ cm. Die kürzere Diagonale bildet mit beiden Seiten ein Dreieck mit dem Winkel 70°; Kosinussatz.
b) $f^2 = 117 + 108\cos 70^\circ \approx 153{,}94$, $f \approx 12{,}41$ cm. Für die längere Diagonale nimmt man den Nebenwinkel 110°; wegen $\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ$ ändert sich nur das Vorzeichen.
c) $A = 6 \cdot 9 \cdot \sin 70^\circ \approx 50{,}74$ cm². Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten

Dreiecken; deshalb fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.
d) $e^2 + f^2 = 234 = 2 \cdot 117$. Stimmt. Die Summe der Diagonalenquadrate ist gleich der Summe der Quadrate aller vier Seiten.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$, $\alpha \approx 36{,}87°$. Die Höhe teilt den Binder in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Ankathete 4 m und Hypotenuse 5 m.
b) $\cos\gamma = \frac{25+25-64}{50} = -0{,}28$, $\gamma \approx 106{,}26°$. Im Dreieck aus zwei Sparren und Spannweite liegt die Spannweite 8 m dem Firstwinkel gegenüber; der negative Kosinus zeigt einen stumpfen Winkel.
c) $h = \sqrt{25 - 16} = 3$ m. Antwort: Das Dach ist 3 m hoch.
d) $36{,}87° + 36{,}87° + 106{,}26° = 180°$. Die Winkelsumme bestätigt die Rechnungen aus a) und b).

Lösung zu Aufgabe 15

a) $AB^2 = 420^2 + 510^2 - 2 \cdot 420 \cdot 510 \cdot \cos 72° \approx 304\,117$, $AB \approx 551{,}5$ m. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bei C: Kosinussatz. Antwort: Der Tunnel ist etwa 552 m lang.
b) $\frac{551{,}5}{8} \approx 68{,}9$, also etwa 69 Tage. Man teilt die Tunnellänge durch die Tagesleistung und rundet auf.
c) $\sin\alpha = \frac{510 \sin 72°}{551{,}5} \approx 0{,}8795$, $\alpha \approx 61{,}6°$; $\beta = 180° - 72° - \alpha \approx 46{,}4°$. Der Sinussatz liefert α, die Winkelsumme β; α ist spitz, weil a nicht die längste Seite ist.
d) $420 + 510 = 930$ m, also 378 m länger als der Tunnel. Ohne Tunnel müsste man den Umweg über C nehmen.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $A = \frac{1}{2} \cdot 4{,}2 \cdot 3{,}6 \cdot \sin 80° \approx 7{,}45$ m². Zwei Seiten mit eingeschlossenem Winkel: Flächenformel mit dem Sinus.
b) $c^2 = 17{,}64 + 12{,}96 - 2 \cdot 4{,}2 \cdot 3{,}6 \cdot \cos 80° \approx 25{,}35$, $c \approx 5{,}03$ m. Kosinussatz für die dritte Seite.
c) $7{,}45 \cdot 38 \approx 283$ €. Antwort: Das Tuch kostet etwa 283 €.
d) $\sin\beta = \frac{3{,}6 \sin 80°}{c} \approx 0{,}704$, $\beta \approx 44{,}8°$. Sinussatz für den Winkel gegenüber der Seite 3,6 m.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\cos B = \frac{40^2+50^2-60^2}{2 \cdot 40 \cdot 50} = \frac{500}{4000} = 0{,}125$, $B \approx 82{,}8°$. Im Dreieck ABC sind alle drei Seiten bekannt; Kosinussatz für den Winkel bei B, gegenüber der Diagonale.
b) $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 50 \cdot \sin B \approx 992$ m². Flächenformel mit den Seiten 40 m und 50 m und dem eingeschlossenen Winkel.
c) $\cos D = \frac{45^2+35^2-60^2}{2 \cdot 45 \cdot 35} = \frac{-350}{3150} \approx -0{,}111$, $D \approx 96{,}4°$; $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 35 \cdot \sin D \approx 783$ m².

Im zweiten Dreieck ist der Kosinus negativ, der Winkel bei D ist stumpf.
d) $A \approx 1775$ m². Die Gesamtfläche ist die Summe beider Teilflächen.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Winkel am Fuß: $90^\circ + 12^\circ = 102^\circ$. Am Schattenende: $35^\circ - 12^\circ = 23^\circ$. An der Spitze: $180^\circ - 102^\circ - 23^\circ = 55^\circ$. Mast und Hang bilden am Fuß einen Winkel von 90° plus Hangneigung; der Sonnenstrahl trifft den Hang unter der Differenz der Winkel.
b) $s = \frac{15 \sin 55^\circ}{\sin 23^\circ} \approx 31{,}4$ m. Sinussatz: Der Schatten liegt dem Winkel an der Mastspitze gegenüber.
c) $\frac{15}{\tan 35^\circ} \approx 21{,}4$ m. Auf ebenem Boden wäre der Schatten die Ankathete im rechtwinkligen Dreieck.
d) Der Hang steigt an und die Strahlen treffen ihn flacher, der Schatten wird gestreckt. Der Schatten am Hang ist deshalb etwa 10 m länger als auf ebenem Boden.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $2R = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20$, $R = 10$ cm. Man setzt in den erweiterten Sinussatz ein.
b) $\alpha \approx 44{,}42^\circ$, $2R = \frac{5}{\sin 44{,}42^\circ} \approx 7{,}14$, $R \approx 3{,}57$ cm. Zuerst bestimmt man einen Winkel mit dem Kosinussatz, dann den Umkreisradius.
c) $2R = \frac{c}{\sin 90^\circ} = c$, also $R = \frac{c}{2}$: der Satz des Thales. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse der Durchmesser des Umkreises.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\cos\gamma = \frac{49+81-144}{126} \approx -0{,}111$, $\gamma \approx 96{,}4^\circ$. Der größte Winkel liegt der längsten Seite gegenüber; der negative Kosinus zeigt, dass er stumpf ist.
b) $\sin\alpha = \frac{7 \sin\gamma}{12} \approx 0{,}5797$, $\alpha \approx 35{,}4^\circ$; $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha \approx 48{,}2^\circ$. Mit dem Sinussatz bestimmt man zuerst den kleineren Winkel α (eindeutig, da spitz), dann β mit der Winkelsumme.
c) Die Summe der drei Winkel ergibt 180°. So kontrolliert man die Rechnung.
d) $A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sin\gamma \approx 31{,}30$. Heron: $s = 14$, $\sqrt{14 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{980} \approx 31{,}30$. Beide Verfahren liefern dieselbe Fläche.