Lösungen - Statistik: Streuung und Datenauswertung

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\bar{x} = \frac{63}{7} = 9$. Man addiert alle sieben Werte (Summe 63) und teilt durch ihre Anzahl.
b) Median 8 (vierter Wert), Modus 7. Bei sieben geordneten Werten ist der vierte der Median; der Modus ist der häufigste Wert.
c) $R = 15 - 4 = 11$. Die Spannweite ist größter minus kleinster Wert.
d) Mittelwert $\frac{98}{7} = 14$ steigt stark, der Median 8 bleibt gleich. Der Mittelwert reagiert stark auf Ausreißer, der Median nicht.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\bar{x} = \frac{23}{8} = 2{,}875$. Man addiert die acht Noten und teilt durch 8.
b) Median 3, Modus 3, Spannweite 4. Bei acht Werten ist der Median der Mittelwert des vierten und fünften Wertes, hier beide 3.
c) $Q_1 = \frac{2+2}{2} = 2$; $Q_3 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$; IQR $= 1{,}5$. Man teilt die Liste in zwei Hälften zu je vier Werten und bestimmt deren Mediane.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Acht Werte: Median $\frac{6+8}{2} = 7$. Bei gerader Anzahl ist der Median der Mittelwert der beiden mittleren Werte.
b) Untere Hälfte 2; 3; 5; 6 mit $Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4$; obere Hälfte 8; 9; 12; 14 mit $Q_3 = \frac{9+12}{2} = 10{,}5$. Die Quartile sind die Mediane der unteren und oberen Hälfte.
c) IQR $= 10{,}5 - 4 = 6{,}5$; $R = 14 - 2 = 12$. Der Quartilsabstand gibt die Breite der mittleren Hälfte der Daten an.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Minimum 3, Maximum 18, Median 9 (fünfter Wert). Die Daten sind bereits geordnet; bei neun Werten ist der fünfte der Median.
b) Untere Hälfte 3; 5; 6; 7: $Q_1 = 5{,}5$. Obere Hälfte 10; 12; 15; 18: $Q_3 = 13{,}5$. Der Median selbst gehört bei ungerader Anzahl zu keiner Hälfte.
c) Die rechte Antenne und Box sind länger als die linke: Die Daten sind nach rechts gestreckt, die großen Werte streuen stärker. Der Abstand vom Median zu Q_3 (4,5) ist größer als der zu Q_1 (3,5).

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\bar{x} = 5$. Summe 40 geteilt durch 8 Werte.
b) Abweichungen: $-3; -1; -1; -1; 0; 0; 2; 4$; Quadrate: $9; 1; 1; 1; 0; 0; 4; 16$. Man

subtrahiert von jedem Wert den Mittelwert und quadriert; die Abweichungen summieren sich zu 0.
c) Summe 32; $s^2 = \frac{32}{8} = 4$; $s = 2$. Die Varianz ist der Mittelwert der quadrierten Abweichungen, die Standardabweichung ihre Wurzel.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\bar{x} = 10$ s. Summe 50 geteilt durch 5.
b) $s^2 = \frac{16+4+0+4+16}{5} = 8$. Man quadriert die Abweichungen $-4; -2; 0; 2; 4$ und bildet den Mittelwert.
c) $s = \sqrt{8} \approx 2{,}83$ s. Die Standardabweichung hat dieselbe Einheit wie die Daten, also Sekunden.
d) Gar nicht: Eine gleichmäßige Verschiebung ändert die Streuung nicht, nur den Mittelwert (auf 15). Alle Abweichungen vom Mittelwert bleiben gleich.

Lösung zu Aufgabe 7

a) A: $\frac{15}{6} = 2{,}5$; B: $\frac{15}{6} = 2{,}5$. Beide Teams erzielen insgesamt 15 Tore in sechs Spielen.
b) A: $s = \sqrt{0{,}25} = 0{,}50$. B: $s = \sqrt{4{,}92} \approx 2{,}22$. Bei A sind alle Abweichungen $\pm 0{,}5$, bei B bis zu $\pm 2{,}5$.
c) Team A: gleicher Schnitt, aber viel kleinere Standardabweichung, also gleichmäßigere Leistung. Die Standardabweichung misst die Gleichmäßigkeit.
d) In 3 von 6 Spielen (5, 5, 4 Tore): $\frac{3}{6} = 0{,}5$. Man zählt die Spiele mit mehr als drei Toren und teilt durch 6.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $\bar{x} = 5$; $s = \sqrt{\frac{4+0+4}{3}} \approx 1{,}633$. Die Abweichungen sind $-2; 0; 2$.
b) Daten 13; 15; 17: $\bar{x} = 15$, $s \approx 1{,}633$ (unverändert). Die Abweichungen vom neuen Mittelwert bleiben $-2; 0; 2$.
c) Daten 6; 10; 14: $\bar{x} = 10$, $s \approx 3{,}266$ (verdoppelt). Die Abweichungen verdoppeln sich auf $-4; 0; 4$.
d) Addition von c: Mittelwert plus c, s gleich. Multiplikation mit k: Mittelwert mal k, s mal $|k|$. Diese Regeln erleichtern zum Beispiel das Umrechnen von Einheiten.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $\bar{x} = \frac{3+14+27+24+10+6}{28} = \frac{84}{28} = 3{,}0$. Jede Note wird mit ihrer Anzahl multipliziert; die Summe wird durch 28 geteilt.
b) Plätze 14 und 15 liegen bei der Note 3: Median 3. Modus ebenfalls 3. Bei 28 Werten liegt der Median zwischen dem 14. und 15. Wert; die Note 3 reicht vom 11. bis zum 19. Platz.
c) $\sum f(x-3)^2 = 42$, $s^2 = \frac{42}{28} = 1{,}5$, $s \approx 1{,}22$. Man multipliziert jede quadrierte Abweichung mit ihrer Häufigkeit und teilt durch 28.

d) $\frac{6+2+1}{28} = \frac{9}{28} \approx 32{,}1\,\%$. Man zählt die Noten 4, 5 und 6.

Lösung zu Aufgabe 10

a) A: 1; 2; 3; 4; 6. B: 2; 2,5; 3; 3,5; 4. Man liest Minimum, Q_1, Median, Q_3 und Maximum an den Strichen ab.
b) A: $R = 5$, IQR $= 2$. B: $R = 2$, IQR $= 1$. Spannweite: Maximum minus Minimum; Quartilsabstand: Länge der Box.
c) Beide Klassen haben den Median 3. Klasse B streut weniger (Quartilsabstand 1 gegen 2): Die Ergebnisse liegen enger beisammen. Gleicher Median, aber unterschiedlich breite Boxen bedeuten unterschiedliche Streuung.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $\bar{x} = \frac{24\,900}{7} \approx 3557$ €; Median 2600 €. Man addiert die sieben Gehälter und teilt durch 7; der Median ist der vierte Wert.
b) Der Median, denn der Ausreißer 9000 € zieht den Mittelwert stark nach oben. Ein einzelner sehr hoher Wert verzerrt den Mittelwert.
c) Ohne Chef: $\bar{x} = 2650$ €; Median $\frac{2600+2600}{2} = 2600$ €. Ohne den Ausreißer liegen Mittelwert und Median nahe beieinander.
d) Untere Hälfte 2400; 2500; 2600: $Q_1 = 2500$. Obere Hälfte 2800; 3000; 9000: $Q_3 = 3000$. IQR $= 500$ €. Der Quartilsabstand ist ebenfalls robust gegen den Ausreißer.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\bar{x} = \frac{220}{12} \approx 18{,}33$ min; Median $\frac{17+17}{2} = 17$ min. Summe der zwölf Zeiten geteilt durch 12; der Median liegt zwischen dem 6. und 7. Wert.
b) $Q_1 = \frac{15+16}{2} = 15{,}5$; $Q_3 = \frac{19+20}{2} = 19{,}5$; IQR $= 4$. Die Quartile sind die Mediane der beiden Hälften mit je sechs Werten.
c) Grenze: $19{,}5 + 1{,}5 \cdot 4 = 25{,}5$. Wegen $31 > 25{,}5$ ist 31 min ein Ausreißer. Werte, die mehr als das 1,5-Fache des Quartilsabstands über Q_3 liegen, gelten als Ausreißer.
d) Mit dem Median von 17 Minuten; der Mittelwert wird durch die 31 min erhöht. Der Median ist robuster und beschreibt die typische Fahrzeit besser.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $\bar{x} = 168{,}0$ cm; Median $\frac{165+168}{2} = 166{,}5$ cm. Summe 1680 geteilt durch 10; der Median liegt zwischen dem 5. und 6. Wert.
b) $s \approx 7{,}59$ cm. Man bildet die quadrierten Abweichungen, ihren Mittelwert und zieht die Wurzel.
c) Bereich $\bar{x} \pm s \approx 160{,}4$ bis $175{,}6$ cm. Außerhalb liegen 158 cm, 160 cm und 185 cm. Man addiert und subtrahiert die Standardabweichung vom Mittelwert.
d) Ohne 185 cm: $s \approx 5{,}32$ cm, deutlich kleiner. Ein einzelner großer Wert erhöht die Standardabweichung deutlich.

Lösung zu Aufgabe 14

a) A: $\bar{x} = 13{,}00$; B: $\bar{x} = 12{,}75$ °C. Man addiert die zwölf Monatswerte und teilt durch 12.
b) A: $s \approx 7{,}81$; B: $s \approx 2{,}20$ °C. Man berechnet die Standardabweichung wie gewohnt; bei A sind die Abweichungen viel größer.
c) Stadt B: Mittelwerte sind ähnlich, aber die Standardabweichung ist viel kleiner, das Klima ist ausgeglichener. Ein kleineres s bedeutet geringere Schwankungen über das Jahr.
d) A: $24 - 2 = 22$ °C. B: $16 - 10 = 6$ °C. Auch die Spannweite zeigt die stärkeren Schwankungen in Stadt A.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $\bar{x} = \frac{0+20+60+75+40+30}{20} = 11{,}25$ €. Man multipliziert jeden Betrag mit seiner Anzahl und teilt durch 20.
b) Plätze 10 und 11 gehören beide zu 10 €: Median 10 €. Modus 10 €. Bei 20 Werten liegt der Median zwischen dem 10. und 11. Wert.
c) Plätze 5 und 6: beide 5 €, also $Q_1 = 5$. Plätze 15 und 16: beide 15 €, also $Q_3 = 15$. Die Quartile sind die Mediane der beiden Hälften mit je zehn Werten.
d) $\frac{5+2+1}{20} = 40\,\%$. Man zählt die Jugendlichen mit 15 € oder mehr.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\bar{x} = 500$ ml. Summe 5000 geteilt durch 10.
b) Quadrate der Abweichungen: $4; 1; 9; 1; 0; 4; 9; 0; 16; 16$, Summe 60. $s^2 = 6$, $s \approx 2{,}45$ ml. Man quadriert die Abweichungen vom Sollwert 500 ml und bildet den Mittelwert.
c) Ja, alle Werte liegen zwischen 495 und 505. Man prüft, ob alle Werte innerhalb von 495 bis 505 ml liegen.
d) Die zweite Maschine, denn $1{,}2$. Die kleinere Standardabweichung bedeutet gleichmäßigere Füllmengen.

Lösung zu Aufgabe 17

a) A: $\bar{x} = 8{,}5$, Median 8. B: $\bar{x} = 9{,}4$, Median 9,5. Man addiert jeweils die zehn Werte; der Median liegt zwischen dem 5. und 6. Wert.
b) A: $s \approx 2{,}42$, IQR $= 10 - 7 = 3$. B: $s \approx 1{,}43$, IQR $= 10 - 8 = 2$. Für den Quartilsabstand bestimmt man die Mediane der Hälften mit je fünf Werten.
c) Klasse B hat den höheren Mittelwert und streut weniger. Höherer Mittelwert und kleinere Streuung sprechen für Klasse B.
d) Klasse B erreicht im Mittel 9,4 Punkte gegen 8,5 in A und ist gleichmäßiger (Standardabweichung etwa 1,4 gegen 2,4). Man stützt die Aussage auf Lage- und Streumaße.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $\frac{30}{1020} \approx 2{,}9\,\%$. Die Zunahme beträgt 30 Stück, bezogen auf 1020.
b) $\frac{50}{20} = 2{,}5$-mal so hoch. Weil die Achse bei 1000 beginnt, sind die Säulen nur 20 und

50 Einheiten hoch.
c) Die abgeschnittene Achse lässt eine kleine Steigerung wie eine Vervielfachung aussehen. Das Diagramm übertreibt den Unterschied stark.
d) Die Achse muss bei 0 beginnen. Dann sind die Säulen 1020 und 1050 fast gleich hoch. Erst dann geben die Säulenhöhen die wirklichen Verhältnisse wieder.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $\bar{x} = 4{,}940$ m. Summe 49,40 m geteilt durch 10.
b) $s \approx 0{,}092$ m. Man bildet die quadrierten Abweichungen vom Mittelwert und zieht die Wurzel aus ihrem Mittelwert.
c) Die Konkurrentin, denn $0{,}04$. Die kleinere Standardabweichung bedeutet gleichmäßigere Sprünge.
d) Median $= 4{,}935$ m, Spannweite $5{,}10 - 4{,}78 = 0{,}32$ m. Der Median liegt zwischen den beiden mittleren Werten 4,92 m und 4,95 m.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $c = 9$ (Median), $e - a = 12$, die Summe ist 55, und 8 muss mindestens zweimal vorkommen: $a = b = 8$. Mittelwert 11 bei fünf Zahlen bedeutet die Summe 55.
b) Dann ist $e = 20$ und $d = 55 - 8 - 8 - 9 - 20 = 10$: Datensatz 8; 8; 9; 10; 20. Aus der Spannweite folgt $e = a + 12$, aus der Summe der Wert von d.
c) Mittelwert $\frac{55}{5} = 11$; Median 9; Spannweite 12; Modus 8. Die Probe bestätigt alle vier Bedingungen.
d) Neuer Mittelwert $\frac{65}{5} = 13$, der Median bleibt 9. Erhöht man den größten Wert um 10, steigt die Summe um 10; der mittlere Wert ändert sich nicht.