Lösungen zur Klassenarbeit - Sinus- und Kosinusfunktion

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Grundlage ist $180^\circ = \pi$.
a) Gradmaß ins Bogenmaß: mit $\frac{\pi}{180^\circ}$ multiplizieren. $150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{150}{180}\pi = \frac{5\pi}{6}$ (1 P.).
b) Bogenmaß ins Gradmaß: mit $\frac{180^\circ}{\pi}$ multiplizieren. $\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ$ (1 P.).
c) $\frac{\pi}{6}$ entspricht 30°. Im Einheitskreis gehört dazu der Punkt mit der y-Koordinate $\frac{1}{2}$, also $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (1 P.). Begründung: Das halbe gleichseitige Dreieck mit Hypotenuse 1 hat die kurze Kathete $\frac{1}{2}$.
d) π entspricht 180°, also dem Punkt $(-1|0)$ ganz links auf dem Einheitskreis. Seine x-Koordinate ist $\cos\pi = -1$ (1 P.). Antwort: $\frac{5\pi}{6}$; 135°; $\frac{1}{2}$; -1.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Allgemein hat $f(x) = a\sin(bx) + d$ die Amplitude $|a|$, die Periode $\frac{2\pi}{b}$ und die Mittellinie $y = d$.
a) Hier ist $a = 3$: Die Amplitude beträgt 3. Der Graph schwankt also um 3 Einheiten nach oben und unten (1 P.).
b) Mit $b = 2$ ergibt sich die Periode $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (1 P.). Der Graph ist gegenüber $\sin x$ in x-Richtung auf die Hälfte gestaucht, eine volle Schwingung dauert nur $\pi \approx 3{,}14$.
c) Die Verschiebung $d = 1$ liefert die Mittellinie $y = 1$. Maximum: $1 + 3 = 4$; Minimum: $1 - 3 = -2$ (2 P.). Das Maximum wird zum Beispiel bei $x = \frac{\pi}{4}$ erreicht, denn dort ist $\sin(2x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $f(\frac{\pi}{4}) = 3 + 1 = 4$. Antwort: Amplitude 3, Periode π, Mittellinie $y = 1$, Wertebereich von -2 bis 4.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Der Grundwinkel mit $\sin x = 0{,}5$ ist $\frac{\pi}{6}$. Ein negativer Sinuswert gehört zu Punkten unterhalb der x-Achse, also zum dritten und vierten Quadranten (1 P.). Dritter Quadrant: $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Vierter Quadrant: $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ (1 P.). Probe: $\sin 210^\circ = -0{,}5$ und $\sin 330^\circ = -0{,}5$.
b) Für $\cos x = 0{,}5$ ist der Grundwinkel $\frac{\pi}{3}$ (60°). Positive Kosinuswerte liegen rechts der y-Achse, im ersten und vierten Quadranten (1 P.). Lösungen: $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ (1 P.). Der Taschenrechner liefert jeweils nur eine Lösung, die zweite findet man über die Symmetrie des Einheitskreises. Antwort: a) $\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\}$, b) $\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}$.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Es gilt $b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Periode $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$ min: Das Rad dreht sich in 8 Minuten einmal (1 P.).

b) $h(0) = 20 - 15\cos 0 = 20 - 15 = 5$ m (Einstieg unten).
$h(2) = 20 - 15\cos\frac{\pi}{2} = 20 - 0 = 20$ m (Höhe der Achse).
$h(4) = 20 - 15\cos\pi = 20 + 15 = 35$ m (höchster Punkt) (1 P.).
c) $20 - 15\cos(\frac{\pi}{4}t) = 27{,}5$ ergibt $-15\cos(\frac{\pi}{4}t) = 7{,}5$, also $\cos(\frac{\pi}{4}t) = -0{,}5$ (1 P.). Der kleinste positive Winkel mit Kosinus $-0{,}5$ ist $\frac{2\pi}{3}$. Aus $\frac{\pi}{4}t = \frac{2\pi}{3}$ folgt $t = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ min, also nach etwa 2 min 40 s (1 P.). Plausibel: zwischen $h(2) = 20$ und $h(4) = 35$.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Die Mittellinie liegt in der Mitte zwischen Minimum und Maximum: $d = \frac{4+24}{2} = 14$ °C. Die Amplitude ist die halbe Schwankung: $a = \frac{24-4}{2} = 10$ °C (1 P.).
b) Die Periode ist ein Jahr, also 12 Monate, daher $b = \frac{2\pi}{12}$. Die Sinusfunktion erreicht ihr Maximum eine Viertelperiode (3 Monate) nach dem Nulldurchgang. Das Maximum soll bei $t = 7$ liegen, also $c = 7 - 3 = 4$: $T(t) = 14 + 10\sin(\frac{2\pi}{12}(t-4))$ (1 P.).
c) $T(5) = 14 + 10\sin(\frac{2\pi}{12}) = 14 + 10\sin 30^\circ = 14 + 5 = 19$ °C (1 P.).
d) $T(t) > 19$ heißt $\sin(\frac{\pi}{6}(t-4)) > 0{,}5$, also $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}(t-4) < \frac{5\pi}{6}$ und $5 < t < 9$. In den Monaten Juni, Juli und August liegt die Temperatur über 19 °C (1 P.).