Lernzettel - Sinus- und Kosinusfunktion

Klasse: Klasse 10

Schwingungen, Wellen, Gezeiten und Tageslicht verlaufen periodisch. Mit Sinus und Kosinus am Einheitskreis kannst du solche Vorgänge für beliebige Winkel beschreiben.

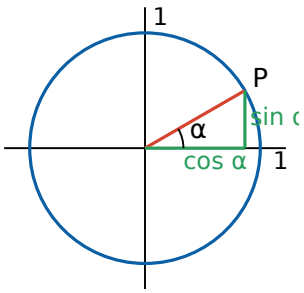
Einstieg: Das Riesenrad

Du sitzt in einer Gondel eines Riesenrads. Du startest unten, steigst auf, erreichst den höchsten Punkt, sinkst wieder und bist nach einer Umdrehung am Ausgangspunkt. Trägst du deine Höhe über der Zeit auf, entsteht eine Wellenlinie, die sich immer wiederholt. Genau solche periodischen Vorgänge beschreiben Sinus und Kosinus: Tag und Nacht, Gezeiten, Töne, Wechselstrom und Jahreszeiten. In diesem Kapitel lernst du, die Winkelfunktionen am Einheitskreis zu verstehen, im Bogenmaß zu rechnen und Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ zu untersuchen und aufzustellen.

Der Einheitskreis

Definition: Einheitskreis

Der **Einheitskreis** ist ein Kreis mit dem Radius 1 um den Ursprung. Wandert ein Punkt P gegen den Uhrzeigersinn, bis der Winkel zur positiven x-Achse α beträgt, hat er die Koordinaten $P(\cos\alpha \mid \sin\alpha)$. So sind Sinus und Kosinus für *alle* Winkel definiert, auch über 90° und für negative Winkel.



Satz: Wichtige Werte

Aus dem Satz des Pythagoras folgt $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Merke: $\sin 30^\circ = 0{,}5$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$. Der Kosinus hat die Werte in umgekehrter Reihenfolge. Der Sinus ist die Höhe des Punktes, der Kosinus seine waagerechte Lage.

Bogenmaß

Definition: Bogenmaß

Das **Bogenmaß** misst den Winkel x als Länge des Bogens auf dem Einheitskreis. Der Vollwinkel hat den Umfang 2π: $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

Satz: Umrechnung

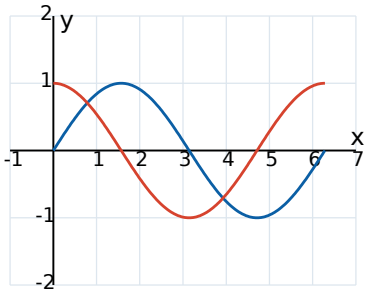
$$x = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi \qquad \text{und} \qquad \alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Beispiele: $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$. Ein Bogenmaß von 1 entspricht etwa $57{,}3^\circ$.

Achtung

Stelle den Taschenrechner auf RAD, wenn du im Bogenmaß rechnest. Im Gradmodus ergibt $\sin(\pi)$ etwa 0,055 statt 0.

Die Graphen von Sinus und Kosinus



Blau: $y = \sin x$. *Rot:* $y = \cos x$, *jeweils für* $0 \leq x \leq 2\pi$.

Satz: Eigenschaften

Beide Funktionen sind **periodisch** mit der Periode 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Die Wertemenge ist $[-1; 1]$. Der Sinus ist **punktsymmetrisch** zum Ursprung ($\sin(-x) = -\sin x$), der Kosinus **achsensymmetrisch** zur y-Achse ($\cos(-x) = \cos x$). Die Nullstellen des Sinus sind $x = k\pi$, die des Kosinus $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit ganzem k. Der Kosinusgraph ist der um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinusgraph.

Beispiel 1: Gleichung $\sin x = 0{,}5$

Löse $\sin x = 0{,}5$ im Intervall $[0; 2\pi]$.

Es gibt zwei Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$ und $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \approx 2{,}618$. Der zweite Wert folgt aus der Symmetrie des Sinus zur Geraden $x = \frac{\pi}{2}$.

Die allgemeine Sinusfunktion

Definition: Amplitude, Periode, Mittellinie

Bei $f(x) = a \cdot \sin\big(b\,(x - c)\big) + d$ gilt:

- $|a|$ ist die **Amplitude**. Ist a, wird der Graph gespiegelt.
- b bestimmt die **Periode** $p = \dfrac{2\pi}{|b|}$.
- c verschiebt in x-Richtung (nach rechts für $c > 0$).
- d verschiebt in y-Richtung und legt die **Mittellinie** $y = d$ fest.

Die Wertemenge ist $[d - |a|;\, d + |a|]$.

Beispiel 2: Eigenschaften ablesen

Lies bei $f(x) = 2\sin(3x) + 1$ Amplitude, Periode, Mittellinie und Wertemenge ab.

Amplitude 2, Periode $\frac{2\pi}{3}$, Mittellinie $y = 1$, Wertemenge $[-1; 3]$.

Es ist $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 1 = 3$, das Maximum.

Beispiel 3: Gleichung aus dem Graphen

Ein Graph hat das Maximum 3, das Minimum -1 und die Periode π. Wie lautet die Funktion?

$d = \frac{3+(-1)}{2} = 1$, $a = \frac{3-(-1)}{2} = 2$, $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. Also $f(x) = 2\sin(2x) + 1$.

So gehst du vor: eine Sinuskurve zeichnen

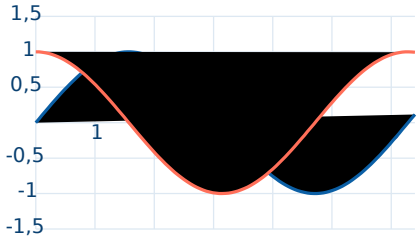
1. Bestimme Mittellinie, Amplitude und Periode.
2. Zeichne die Mittellinie und markiere darüber und darunter die Amplitude.
3. Teile eine Periode in vier gleiche Abschnitte: Bei 0, $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$, p liegen Mitte, Hoch, Mitte, Tief, Mitte (für $a > 0$).
4. Verbinde die fünf Punkte mit einer glatten Welle und wiederhole das Muster.

Die vier Parameter der Sinusfunktion

Jede allgemeine Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$ lässt sich aus der Normalsinuskurve durch vier Veränderungen gewinnen. Der Faktor a streckt in y-Richtung: $|a|$ ist die **Amplitude**, also der Abstand zwischen Mittellinie und Maximum. Der Faktor b staucht in x-Richtung: Die **Periode** beträgt $\frac{2\pi}{|b|}$. Der Wert c verschiebt den Graphen nach rechts (bei negativem c nach links). Der Wert d verschiebt den Graphen nach oben, die **Mittellinie** ist $y = d$. Das Maximum beträgt $d + |a|$, das Minimum $d - |a|$. Mit diesen vier Zahlen kannst du jede Welle beschreiben, und umgekehrt kannst du aus dem Graphen die Zahlen ablesen.

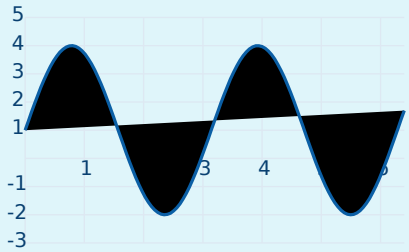
Parameter	Wirkung	Ablesen am Graphen
a	Amplitude	halber Abstand zwischen Maximum und Minimum

Parameter	Wirkung	Ablesen am Graphen
b	Periode $\frac{2\pi}{b}$	Abstand zweier Hochpunkte
c	Verschiebung nach rechts	Verschiebung des Nulldurchgangs (bei steigendem Ast)
d	Mittellinie	Mittelwert von Maximum und Minimum



Beispiel 6: Eigenschaften aus der Gleichung ablesen

Untersuche $f(x) = 3\sin(2x) + 1$.



Die Amplitude ist $|a| = 3$. Die Periode ist $\frac{2\pi}{2} = \pi$: Nach einer halben Umdrehung wiederholt sich der Verlauf. Die Mittellinie ist $y = 1$. Das Maximum beträgt $1 + 3 = 4$, das Minimum $1 - 3 = -2$. Der Wertebereich ist also $[-2; 4]$. Der Graph schneidet die y-Achse bei $f(0) = 1$, denn $\sin 0 = 0$.

Beispiel 7: Gleichung aus Eigenschaften aufstellen

Eine Welle hat das Maximum 5, das Minimum 1 und die Periode 4. Der Graph startet auf der Mittellinie und steigt. Gib eine Gleichung an.

Die Mittellinie liegt in der Mitte zwischen 1 und 5, also $d = 3$. Die Amplitude ist $a = \frac{5-1}{2} = 2$. Aus der Periode folgt $\frac{2\pi}{b} = 4$, also $b = \frac{\pi}{2}$. Weil der Graph auf der Mittellinie startet und steigt, ist keine Verschiebung nötig. Die Gleichung lautet $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$. Probe: $f(1) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 3 = 5$, das Maximum.

Beispiel 8: Eine Kosinusgleichung lösen

Löse $\cos x = -0{,}5$ für $0 \le x \le 2\pi$.

Der Kosinus ist die x-Koordinate eines Punktes am Einheitskreis. Sie ist $-0{,}5$ in zwei Punkten, im zweiten und im dritten Quadranten. Aus $\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$ folgt mit Spiegelung $x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ und $x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Das sind $120°$ und $240°$. Weitere Lösungen

außerhalb des Intervalls entstehen durch Addition von 2π.

Achtung: Typische Fehler

Erstens: Stelle den Taschenrechner auf RAD, wenn du im Bogenmaß rechnest, und auf DEG, wenn du im Gradmaß rechnest. Zweitens: Die Periode ist nicht b, sondern $\frac{2\pi}{b}$. Ein größerer Faktor b bedeutet schnellere Schwingung und eine kürzere Periode. Drittens: Bei $\sin(b(x-c))$ wird um c nach rechts verschoben. Steht die Klammer als $\sin(bx-d)$, dann beträgt die Verschiebung $\frac{d}{b}$ und nicht d. Viertens: Eine Gleichung wie $\sin x = 0{,}5$ hat im Intervall von 0 bis 2π zwei Lösungen, nicht nur die, die der Rechner anzeigt.

Sinus und Kosinus in der Anwendung

Viele Messreihen in der Natur sind näherungsweise sinusförmig. Die Temperatur im Jahresverlauf schwankt um einen Mittelwert, die Höhe einer Gondel im Riesenrad folgt einer Kosinuskurve, und der Wasserstand an der Nordsee hebt und senkt sich im Rhythmus der Gezeiten. Bei solchen Aufgaben gehst du immer gleich vor: Du bestimmst aus den Daten Mittellinie, Amplitude und Periode und baust daraus die Funktion zusammen. Danach beantwortest du Fragen, indem du Werte einsetzt oder Gleichungen löst.

So gehst du vor: Eine Welle modellieren

1. Lies Maximum und Minimum ab und berechne die Mittellinie $d = \frac{\max + \min}{2}$ und die Amplitude $a = \frac{\max - \min}{2}$.
2. Lies die Periode T ab und berechne $b = \frac{2\pi}{T}$.
3. Lege fest, ob Sinus oder Kosinus passt: Sinus startet auf der Mittellinie und steigt, Kosinus startet im Maximum.
4. Bestimme die Verschiebung c, wenn der Start nicht passt, und kontrolliere mit einem Punkt.
5. Beantworte die Fragen und formuliere einen Antwortsatz mit Einheit.

Beispiel 9: Die Schaukel

Ein Kind schaukelt. Die Höhe seines Sitzes über dem Boden schwankt zwischen 0,4 m und 1,6 m. Eine Schwingung dauert 3 Sekunden. Zum Zeitpunkt null ist der Sitz im tiefsten Punkt. Stelle eine Funktion auf.

Die Mittellinie liegt bei $d = \frac{1{,}6+0{,}4}{2} = 1$ m, die Amplitude beträgt $a = 0{,}6$ m. Aus der Periode 3 s folgt $b = \frac{2\pi}{3}$. Weil der Sitz im tiefsten Punkt startet, passt die negative Kosinusfunktion: $h(t) = 1 - 0{,}6\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$. Probe: $h(0) = 0{,}4$, und nach 1,5 s ist $h = 1{,}6$ m, der höchste Punkt. Nach einer Sekunde ist $h(1) = 1 - 0{,}6 \cdot (-0{,}5) = 1{,}3$ m.

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Der Einheitskreis hat den Radius 1 und den Mittelpunkt im Ursprung. Läuft ein Punkt gegen den Uhrzeigersinn um den Kreis, dann gehört zu jedem Winkel α ein Punkt mit den Koordinaten $(\cos\alpha \mid \sin\alpha)$. Weil der Radius 1 ist, liegen beide Werte zwischen -1 und 1. Im ersten Quadranten sind beide positiv, im zweiten ist nur der Sinus positiv, im dritten sind beide negativ, im vierten ist nur der Kosinus positiv. Dieses Bild erklärt, warum die Graphen periodisch sind: Nach 360°, also 2π, ist der Punkt wieder am Ausgangsort. Es erklärt auch, warum der Kosinus der um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobene Sinus ist, denn der Punkt hat bei 90° die x-Koordinate 0. Wer die Werte der wichtigen Winkel 30°, 45° und 60° sicher kennt, kann fast jede Aufgabe ohne Taschenrechner lösen.

Wusstest du? Strom und Töne sind Sinuswellen

Die Netzspannung in der Steckdose ist eine Sinuswelle mit der Frequenz 50 Hertz: Sie schwingt 50-mal pro Sekunde, die Periode beträgt also 0,02 Sekunden. Der Effektivwert von 230 Volt gehört zu einem Spitzenwert von etwa $230 \cdot \sqrt{2} \approx 325$ Volt. Auch ein reiner Ton, zum Beispiel der Kammerton a mit 440 Hertz, ist eine Sinusschwingung. Je größer die Amplitude, desto lauter der Ton; je größer die Frequenz, desto höher der Ton.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Am Einheitskreis ist $\cos\alpha$ die x- und $\sin\alpha$ die y-Koordinate des Punktes zum Winkel α; beide Werte liegen zwischen -1 und 1.
- Bogenmaß: $x = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$; $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $360^\circ = 2\pi$; Bogenlänge am Kreis $b = x \cdot r$.
- Wichtige Werte: $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; entsprechend für den Kosinus.
- Sinus und Kosinus sind periodisch mit der Periode 2π; $\sin$ ist punktsymmetrisch, $\cos$ achsensymmetrisch zur y-Achse; $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$: Amplitude $|a|$, Periode $\frac{2\pi}{|b|}$, Verschiebung c nach rechts, Mittellinie $y = d$; Maximum $d + |a|$, Minimum $d - |a|$.
- Gleichungen $\sin x = k$ oder $\cos x = k$ haben in einer Periode meist zwei Lösungen (Symmetrie am Einheitskreis).
- Taschenrechner: im Bogenmaß auf RAD, im Gradmaß auf DEG stellen.
- Modellieren: Mittellinie und Amplitude aus Maximum und Minimum, $b = \frac{2\pi}{T}$ aus der Periode.

Achtung

Die Periode von $\sin(2x)$ ist π, nicht 4π. Bei $\sin x = 0{,}5$ gibt es im Intervall zwei Lösungen. Die Amplitude ist immer positiv. Verwechsle Sinus und Kosinus am Einheitskreis nicht.

Beispiel 4: Riesenrad

Ein Riesenrad hat den Radius 20 m, der Mittelpunkt liegt 22 m hoch, eine Umdrehung dauert 10 Minuten. Beschreibe die Höhe.

$h(t) = 22 - 20\cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$. Zur Zeit $t = 0$ bist du unten (2 m), nach 5 Minuten oben (42 m).

Hinweis

Typische Aufgaben in Klassenarbeiten: Umrechnen zwischen Grad- und Bogenmaß, Ablesen von Amplitude und Periode, einfache Gleichungen wie $\sin x = 0{,}5$ und Sachaufgaben zu periodischen Vorgängen. Rechne die Ergebnisse mit dem Taschenrechner im richtigen Modus nach.

Beispiel 5: Grad in Bogenmaß

Rechne 150° ins Bogenmaß um und $\frac{2\pi}{3}$ in Grad.

$x = \frac{150^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{5\pi}{6}$.

$\alpha = \frac{2\pi/3}{\pi} \cdot 180^\circ = 120^\circ$.

Merke: Sinus und Kosinus verschoben

Der Kosinus ist ein um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobener Sinus: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Deshalb kannst du jede Schwingung mit Sinus *oder* Kosinus beschreiben, je nachdem, wo sie bei $x = 0$ startet. Startet sie in der Mitte, passt der Sinus, startet sie im Hoch- oder Tiefpunkt, passt der Kosinus.

Ottos Tipp

Merke dir die Fünf-Punkte-Regel: Eine Sinuswelle hat in einer Periode die Punkte Anfang, Hoch, Mitte, Tief, Ende. Wenn du diese fünf Punkte zeichnest, ist der Graph schon fast fertig.