Lösungen - Sinus- und Kosinusfunktion

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π. Man multipliziert das Gradmaß mit $\frac{\pi}{180^\circ}$ und kürzt: zum Beispiel $30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$. Eine volle Umdrehung entspricht 2π.
b) 30°, 120°, 135°, 150°. Umgekehrt multipliziert man das Bogenmaß mit $\frac{180^\circ}{\pi}$; π kürzt sich dabei heraus.
c) $1\,\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$; $2\,\text{rad} \approx 114{,}6^\circ$. Ein Radiant ist der Winkel, bei dem der Bogen genau so lang ist wie der Radius.

Lösung zu Aufgabe 2

a) 120°, also $\frac{2\pi}{3}$. 20 Minuten sind ein Drittel einer Stunde, also ein Drittel von 360° bzw. 2π.
b) $b = \frac{2\pi}{3} \cdot 12 = 8\pi \approx 25{,}13$ cm. Die Bogenlänge ist Bogenmaß mal Radius: $b = x \cdot r$. Antwort: Die Zeigerspitze legt etwa 25 cm zurück.
c) $2\pi \cdot 12 \approx 75{,}40$ cm. In einer Stunde legt die Spitze einen ganzen Kreisumfang zurück.
d) $\frac{7{,}5}{60} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$. 7,5 Minuten sind ein Achtel der Stunde, also ein Achtel von 2π.

Lösung zu Aufgabe 3

a) 0, $\frac{1}{2}$, 1. Am Einheitskreis ist der Sinus die y-Koordinate des Punktes: bei 0 ganz rechts, bei $\frac{\pi}{2}$ ganz oben.
b) $\frac{1}{2}$, -1, 1. Der Kosinus ist die x-Koordinate: Bei π liegt der Punkt ganz links.
c) -1, 0, 0. Bei $\frac{3\pi}{2}$ liegt der Punkt ganz unten, bei $\frac{\pi}{2}$ ganz oben, bei π ganz links.
d) $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. Bei 45° sind Sinus und Kosinus gleich groß; aus $2\sin^2 = 1$ folgt dieser Wert.

Lösung zu Aufgabe 4

a) zweiter Quadrant: $\sin 150^\circ = 0{,}50$ positiv, $\cos 150^\circ \approx -0{,}866$ negativ. Im zweiten Quadranten liegt der Punkt links oben: y positiv, x negativ. Es gilt $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$.
b) dritter Quadrant: $\sin 210^\circ = -0{,}50$, $\cos 210^\circ \approx -0{,}866$ beide negativ. Im dritten Quadranten liegt der Punkt links unten: beide Koordinaten negativ.
c) vierter Quadrant: $\sin 300^\circ \approx -0{,}866$ negativ, $\cos 300^\circ = 0{,}5$ positiv. Im vierten Quadranten liegt der Punkt rechts unten: y negativ, x positiv.

Lösung zu Aufgabe 5

Zu einem Sinuswert gibt es meist zwei Lösungen in $[0; 2\pi]$: x und $\pi - x$. Beim Kosinus sind es x und $2\pi - x$.

a) $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$. $\sin 30° = 0{,}5$ und $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
b) $x = \frac{3\pi}{2}$. Der Wert -1 wird nur am tiefsten Punkt erreicht.
c) $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$. Der Kosinus ist null, wenn der Punkt ganz oben oder ganz unten liegt.
d) $x = \frac{2\pi}{3}$ und $x = \frac{4\pi}{3}$. Der Kosinus ist negativ im zweiten und dritten Quadranten.
e) $x_1 = \sin^{-1} 0{,}8 \approx 0{,}927$ und $x_2 = \pi - x_1 \approx 2{,}214$. Der Taschenrechner liefert nur die erste Lösung; die zweite ergibt sich aus der Symmetrie.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $2\sin x$: Amplitude 2, Periode 2π, Mittellinie 0, Wertebereich $[-2; 2]$. $\sin(2x)$: Amplitude 1, Periode π, Mittellinie 0, $[-1; 1]$. Der Faktor vor dem Sinus ist die Amplitude, der Faktor vor x verkürzt die Periode auf $\frac{2\pi}{b}$.
b) $\sin x + 1$: Amplitude 1, Periode 2π, Mittellinie 1, $[0; 2]$. $-\sin x$: Amplitude 1, Periode 2π, Mittellinie 0, $[-1; 1]$, gespiegelt an der x-Achse. Ein Summand verschiebt die Mittellinie nach oben; das Minuszeichen spiegelt den Graphen.
c) Alle außer $\sin(2x)$. Nur bei $\sin(2x)$ ändert sich die Periode.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Amplitude 3, Periode π, Mittellinie 1, Maximum 4, Minimum -2. Amplitude 3 und Mittellinie 1; Maximum ist Mittellinie plus Amplitude, Minimum Mittellinie minus Amplitude.
b) Amplitude $0{,}5$, Periode 4π, Mittellinie -2, Maximum $-1{,}5$, Minimum $-2{,}5$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor x verdoppelt die Periode auf 4π.
c) Amplitude 4, Periode 2, Mittellinie 0, Maximum 4, Minimum -4. Bei $b = \pi$ ist die Periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $0;\ 1;\ \sqrt{3} \approx 1{,}73;\ 2;\ 0;\ -2;\ 0$. Man nimmt die Sinuswerte des Einheitskreises mal 2.
b) $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$. Die Nullstellen sind dieselben wie bei $\sin x$, denn der Faktor 2 ändert sie nicht.
c) Maximum 2 bei $x = \frac{\pi}{2}$, Minimum -2 bei $x = \frac{3\pi}{2}$. Die Amplitude 2 bestimmt die Extremwerte.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Mittellinie 25 m, Amplitude 20 m, Periode 10 min. Die Mittellinie ist die Höhe der Nabe, die Amplitude der Radius 20 m.
b) $h(0) = 5$; $h(1) = 25 - 20\cos 36° \approx 8{,}82$; $h(2{,}5) = 25$; $h(5) = 45$ (m). Man setzt die Zeiten ein; nach einer halben Umdrehung ist die Gondel oben (45 m).
c) $\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) = -0{,}5$, also $\frac{\pi t}{5} = \frac{2\pi}{3}$ und $t = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ min. Für 35 m Höhe muss $-20\cos(\ldots) = 10$ gelten. Antwort: nach etwa 3 Minuten 20 Sekunden.
d) Zwischen $\frac{10}{3}$ und $\frac{20}{3}$ min: $\frac{10}{3} \approx 3{,}33$ min. Aus Symmetriegründen ist die Gondel bis

$\frac{20}{3}$ min über 35 m.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Periode $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$ h. Hochwasser $6{,}5$ m bei $t = 3$ (3 Uhr), Niedrigwasser $1{,}5$ m bei $t = 9$ (9 Uhr). Die Periode ist $\frac{2\pi}{b}$; Hochwasser bei $\sin = 1$, Niedrigwasser bei $\sin = -1$.
b) $6{,}5 - 1{,}5 = 5$ m. Der Tidenhub ist die doppelte Amplitude.
c) $h(1) = 4 + 2{,}5 \sin 30^\circ = 5{,}25$ m. Man setzt $t = 1$ ein: $\frac{\pi}{6}$ entspricht 30°.
d) $\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \geq 0{,}6$: $\frac{\pi}{6}t \geq 0{,}644$, also $t \geq 1{,}23$ h und $t \leq 4{,}77$ h. Zeitfenster $\approx 3{,}54$ h, also gut 3,5 Stunden. Man löst $4 + 2{,}5\sin(\ldots) \geq 5{,}5$ und nimmt beide Lösungen der Sinusgleichung.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Amplitude 325 V, Frequenz 50 Hz, Periodendauer $\frac{1}{50} = 0{,}02$ s. Die Amplitude ist der Faktor 325, die Frequenz steht im Argument $2\pi ft$.
b) $U(0{,}005) = 325 \sin \frac{\pi}{2} = 325$ V; $U(0{,}0025) = 325 \sin \frac{\pi}{4} \approx 229{,}8$ V. Bei $t = 0{,}005$ s ist eine Viertelperiode vergangen, die Spannung ist maximal.
c) In jeder Periode zweimal, also 100-mal pro Sekunde. Pro Periode gibt es zwei Nulldurchgänge.
d) $\frac{325}{\sqrt{2}} \approx 229{,}8$ V, also etwa die bekannten 230 V. Der Effektivwert ist die Amplitude geteilt durch $\sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $T = \frac{1}{440} \approx 2{,}27$ ms. Die Periodendauer ist der Kehrwert der Frequenz.
b) 880 Hz, $T \approx 1{,}14$ ms, also halb so lang. Eine Oktave höher bedeutet doppelte Frequenz und halbe Periodendauer.
c) $\sin(2\pi \cdot 440 \cdot 0{,}0005) = \sin(1{,}382) \approx 0{,}982$. Man setzt $t = 0{,}5$ ms ein; der Rechner muss im Bogenmaß stehen.
d) Der Ton wird lauter, die Tonhöhe bleibt gleich. Die Amplitude bestimmt die Lautstärke, die Frequenz die Tonhöhe.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Amplitude 8 cm, Periode $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ s. Die Amplitude ist die Auslenkung beim Loslassen, die Periode $\frac{2\pi}{b}$.
b) $s(0{,}5) = 8 \cos 45^\circ \approx 5{,}66$ cm; $s(1) = 8 \cos 90^\circ = 0$ (Ruhelage). Man setzt die Zeiten ein; bei $s = 0$ ist das Gewicht in der Ruhelage.
c) Nach 1 s. Die Ruhelage wird erstmals nach einer Viertelperiode erreicht.
d) $\frac{60}{4} = 15$ Schwingungen. In einer Minute passen 60 s durch 4 s Schwingungen.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $T(1) = 10 + 9\sin(-90^\circ) = 1$; $T(4) = 10$; $T(7) = 19$; $T(10) = 10$ (°C). Man setzt die

Monate ein; im Januar ist das Argument $-\frac{\pi}{2}$.
b) Mittelwert 10 °C, Amplitude 9 °C, Periode 12 Monate. Mittelwert ist der Summand, Amplitude der Faktor, Periode 12 Monate.
c) Am wärmsten im Juli (19 °C), am kältesten im Januar (1 °C). Maximum bei $\sin = 1$, also $t = 7$; Minimum bei $\sin = -1$, also $t = 1$.
d) $10 + 9\sin(\ldots) > 14{,}5$ bedeutet $\sin(\ldots) > 0{,}5$. Das gilt für 5, also für einen Zeitraum von 4 Monaten. Mit den Monatswerten $t = 6; 7; 8$ liegen Juni, Juli und August darüber; Mai und September liegen genau bei 14,5 °C. Man löst die Ungleichung mit $\sin(\ldots) = 0{,}5$.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Maximum 3, Minimum -1, Mittellinie $y = 1$. Man liest den höchsten und den tiefsten Wert ab; die Mittellinie liegt genau dazwischen.
b) $a = \frac{3-(-1)}{2} = 2$, $d = 1$: $f(x) = 2\sin x + 1$. Die Amplitude ist der halbe Abstand zwischen Maximum und Minimum.
c) $2\sin x + 1 = 0$, $\sin x = -0{,}5$: $x = \frac{7\pi}{6} \approx 3{,}67$ und $x = \frac{11\pi}{6} \approx 5{,}76$. Der Sinus ist negativ im dritten und vierten Quadranten.
d) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$. Man setzt $\frac{\pi}{6}$ ein: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\frac{2\pi}{2} = \pi$; $\frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \approx 12{,}57$; $\frac{2\pi}{\pi} = 2$. Man setzt jeweils b in $\frac{2\pi}{b}$ ein.
b) $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$. Man stellt die Formel nach b um.
c) $\frac{12\pi}{\pi} = 12$ Perioden. Man teilt die Intervalllänge durch die Periode.
d) $b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}262$. Periode 24 bedeutet zum Beispiel einen Tagesverlauf in Stunden.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Der Sinus ist 1 bei $t - 80 = \frac{365}{4} \approx 91$, also $t \approx 171$ (21. Juni): $D = 12{,}2 + 4{,}2 = 16{,}4$ h. Der Sinus erreicht 1, wenn das Argument $\frac{\pi}{2}$ ist, also nach einem Viertel des Jahres ab Tag 80.
b) Bei $t \approx 80 + 273{,}75 \approx 354$ (21. Dezember): $D = 12{,}2 - 4{,}2 = 8{,}0$ h. Der kürzeste Tag liegt eine halbe Periode nach dem längsten.
c) $D(80) = 12{,}2$ h. Am Tag 80 (Frühlingsanfang) ist das Argument 0; der Tag dauert so lange wie im Mittel.
d) $\sin\ldots > \frac{1{,}8}{4{,}2} \approx 0{,}4286$. Das gilt zwischen $\frac{365}{2\pi} \cdot 0{,}443$ und $\frac{365}{2\pi} \cdot 2{,}699$ nach $t = 80$, also etwa 131 Tage. Man löst $D(t) > 14$ mit der Umkehrfunktion des Sinus und rechnet in Tage um.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Periode $\frac{2\pi}{\pi/3} = 6$ s; höchster Punkt $0{,}8$ m. Periode $\frac{2\pi}{b}$; der höchste Punkt ist die Amplitude.

b) $h(1) = 0{,}8 \sin 60° \approx 0{,}693$ m. Man setzt $t = 1$ ein: $\frac{\pi}{3}$ entspricht $60°$.
c) Bei $\frac{\pi}{3}t = \frac{\pi}{2}$, also $t = 1{,}5$ s. Der höchste Punkt wird nach einer Viertelperiode erreicht.
d) $\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) > 0{,}5$ für $\frac{\pi}{6}$, also $0{,}5$: 2 s. Man löst die Ungleichung mit $\sin(\ldots) = 0{,}5$ und bestimmt die Dauer.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Mittellinie $\frac{28+12}{2} = 20$ °C, Amplitude $\frac{28-12}{2} = 8$ °C. Mittellinie: Mittelwert von Maximum und Minimum; Amplitude: halbe Differenz.
b) Maximum bei $t - 9 = 6$, also $t = 15$: $T = 28$. Minimum bei $t - 9 = 18$, also $t = 27 \equiv 3$: $T = 12$. Das stimmt. Man prüft, dass das Argument bei 15 Uhr $\frac{\pi}{2}$ und bei 3 Uhr $\frac{3\pi}{2}$ (bzw. $-\frac{\pi}{2}$) ist.
c) $T(12) = 20 + 8 \sin 45° \approx 25{,}66$ °C. Man setzt $t = 12$ ein: Das Argument ist $\frac{\pi}{4}$.
d) $\sin(\ldots) > 0{,}5$ für 2, also von 11 bis 19 Uhr: 8 Stunden. Man löst die Ungleichung $T(t) > 24$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6}$ oder $x = \frac{5\pi}{6}$. Man isoliert den Sinus und nutzt die zwei Lösungen x und $\pi - x$.
b) $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, also $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Man löst zuerst für $2x$ in $[0; 4\pi]$ und teilt dann durch 2.
c) $\tan x = 1$: $x = \frac{\pi}{4}$ oder $x = \frac{5\pi}{4}$. Man teilt durch $\cos x$ (für $\cos x \neq 0$) und erhält den Tangens.
d) $\cos x(2\cos x - 1) = 0$: $\cos x = 0$ ($x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$) oder $\cos x = \frac{1}{2}$ ($x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$). Man klammert $\cos x$ aus; ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist.