Lernzettel - Prüfungsvorbereitung MSA: Zahlen und Terme

Klasse: Klasse 10

Der Mittlere Schulabschluss (MSA) prüft am Ende der 10. Klasse die Grundlagen. Im Bereich Zahlen und Terme kommen immer wieder dieselben Themen dran: Prozentrechnung, Potenzen und Wurzeln, Terme umformen und Gleichungen lösen.

Einstieg: Was kostet der neue Fernseher wirklich?

Im Laden steht ein Fernseher für 800 € mit der Aufschrift „25 % Rabatt, Preis inklusive Mehrwertsteuer“. Wie viel zahlst du? Wie viel Mehrwertsteuer steckt im Preis? Und wie hoch war der Preis vor dem Rabatt? Solche Fragen gehören zum Alltag und gehören auch zu jeder MSA-Prüfung. Sie verlangen Prozentrechnung, sicheres Umformen von Termen und das Lösen von Gleichungen. Dieses Kapitel wiederholt die Rechenfertigkeiten der Klassen 5 bis 10 und übt sie an prüfungsnahen Aufgaben.

Prozentrechnung

Definition: Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz

Der **Grundwert** G entspricht 100 %, der **Prozentwert** W ist der Teil, der **Prozentsatz** ist $p\,\%$.

Regel: Prozentformeln

$W = G \cdot \frac{p}{100}$, $p = \frac{W}{G} \cdot 100$, $G = \frac{W}{p} \cdot 100$. Bei jährlicher Änderung um $p\,\%$ gilt $K_n = K_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$.

Beispiel 1: Rabatt und Mehrwertsteuer

Eine Jacke kostet 80 €, es gibt 25 % Rabatt. Ein Gerät kostet brutto 119 € (19 % Mehrwertsteuer). Wie hoch sind der neue Preis und der Nettopreis?

Rabatt: $80 \cdot 0{,}25 = 20$ €, neuer Preis 60 €. Schneller: $80 \cdot 0{,}75 = 60$.

Brutto $=$ Netto $\cdot 1{,}19$, also Netto $= \frac{119}{1{,}19} = 100$ €.

Beispiel 2: Zinseszins

3000 € werden zu 2,5 % Zinsen angelegt. Wie viel sind es nach 4 Jahren?

$3000 \cdot 1{,}025^4 \approx 3311{,}44$ €.

Potenzen und Wurzeln

Regel: Potenzgesetze

Für $a, b > 0$: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ und $a^m : a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ und $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Definition: wissenschaftliche Schreibweise

Die **wissenschaftliche Schreibweise** schreibt Zahlen als $z \cdot 10^k$ mit $1 \leq z$: $45\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^7$ und $0{,}00032 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$. Beim Multiplizieren multiplizierst du die Vorzahlen und addierst die Exponenten: $(3 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^3) = 6 \cdot 10^8$.

Regel: Wurzelgesetze

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ und $\sqrt{a^2} = |a|$. Du vereinfachst, indem du Quadratzahlen herausziehst: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$. Gleiche Wurzeln darfst du addieren: $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Achtung

Bei 2^{-3} ist das Ergebnis $\frac{1}{8}$, nicht -8. Bei Rabatt und Aufschlag ist der Ausgangspreis 100 %, rechne nicht vom falschen Grundwert.

Terme umformen

Satz: Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiel 3: Faktorisieren und Ausmultiplizieren

Faktorisiere $x^2 - 49$, $4x^2 + 12x + 9$, $6x^2 - 9x$ und multipliziere $(x+2)(x-3)$ aus.

$x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$, $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$, $6x^2 - 9x = 3x(2x-3)$.

$(x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$.

Achtung

$(a+b)^2$ ist nicht a^2+b^2: Das Doppelprodukt $2ab$ darfst du nicht vergessen.

Gleichungen lösen

So gehst du vor: lineare Gleichung lösen

1. Löse Klammern auf.
2. Fasse gleichartige Terme zusammen.
3. Bringe alle x auf eine Seite und die Zahlen auf die andere.
4. Teile durch den Faktor vor x und mache die Probe.

Beispiel 4: Lineare Gleichung

Löse $5(x-2)=2x+8$.

$5x-10=2x+8$, dann $3x=18$ und $x=6$. Probe: $5\cdot 4=20$ und $2\cdot 6+8=20$.

Satz: pq-Formel

Für $x^2+px+q=0$ gilt

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Ist der Term unter der Wurzel (Diskriminante) negativ, gibt es keine reelle Lösung. Reinquadratische Gleichungen wie $2x^2-8=0$ löst du direkt: $x^2=4$, also $x=\pm 2$.

Beispiel 5: Quadratische Gleichung

Löse $x^2+4x-12=0$.

$x=-2\pm\sqrt{4+12}=-2\pm 4$, also $x_1=2$ und $x_2=-6$.

Beispiel 6: Gleichungssystem

Löse $2x+3y=12$ und $x-y=1$.

Aus der zweiten Gleichung folgt $x=y+1$. Einsetzen: $2y+2+3y=12$, also $y=2$ und $x=3$.

Textaufgaben im Prüfungsstil

So gehst du vor: Textaufgaben lösen

1. Lege die Variable fest.

2. Stelle die Gleichung auf.
3. Löse sie und mache die Probe.
4. Schreibe einen Antwortsatz.

Beispiel 7: Rechteck

Ein Rechteck hat den Umfang 36 cm, die Länge ist 6 cm größer als die Breite. Wie groß ist die Fläche?

Mit der Breite b: $2(b + b + 6) = 36$, also $b = 6$ und $l = 12$. Fläche: $72\ \text{cm}^2$.

Hinweis

Beginne in der Prüfung mit den Aufgaben, die du sicher kannst. Schreibe jeden Rechenschritt auf, denn auch ein richtiger Ansatz bringt Punkte. Runde erst am Ende und prüfe die Größenordnung: Ein Preis nach 25 % Rabatt muss kleiner sein als der Anfangspreis.

Beispiel 8: Wissenschaftliche Schreibweise

Schreibe $0{,}00032 \cdot 5\,000\,000$ in wissenschaftlicher Schreibweise.

$3{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{6} = 16 \cdot 10^{2} = 1{,}6 \cdot 10^{3}$. Du multiplizierst die Vorzahlen ($3{,}2 \cdot 5 = 16$) und addierst die Exponenten ($-4 + 6 = 2$). Weil die Vorzahl danach größer als 10 ist, rechnest du um: $16 \cdot 10^{2} = 1{,}6 \cdot 10^{3}$.

Beispiel 9: Wurzeln vereinfachen

Vereinfache $\sqrt{72} - \sqrt{18}$.

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$. Also $6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Hinweis

Prozente rechnest du am schnellsten mit dem Faktor. Potenzen vereinfachst du mit den Potenzgesetzen, Wurzeln durch Herausziehen von Quadratzahlen. Binomische Formeln brauchst du zum Ausmultiplizieren und Faktorisieren. Quadratische Gleichungen löst du mit der pq-Formel, Gleichungssysteme durch Einsetzen oder Addieren.

Prozentrechnung mit Faktoren

Am schnellsten rechnest du Prozentaufgaben mit dem Wachstumsfaktor. Eine Erhöhung um $p\,\%$ bedeutet Multiplikation mit $1 + \frac{p}{100}$, eine Senkung um $p\,\%$ Multiplikation mit $1 - \frac{p}{100}$. Mehrere Änderungen hintereinander werden einfach multipliziert. Besonders wichtig ist die Rückwärtsrechnung: Wenn ein Preis nach einer Erhöhung um 19 % gegeben

ist, rechnest du durch $1{,}19$ und *nicht* minus 19 %, denn die 19 % beziehen sich auf den ursprünglichen Grundwert und nicht auf den neuen Wert.

Beispiel 10: Bruttopreis und Nettopreis

Ein Laptop kostet inklusive 19 % Mehrwertsteuer 1190 €. Wie hoch ist der Nettopreis, und wie viel Steuer ist enthalten?

Der Bruttopreis entspricht 119 % des Nettopreises, also ist der Nettopreis $1190 : 1{,}19 = 1000$ €. Die Steuer beträgt $1190 - 1000 = 190$ €. Wer fälschlich $19\,\%$ von 1190 € abzieht, erhält 963,90 € und liegt um 36,10 € daneben.

Beispiel 11: Zwei Rabatte hintereinander

Auf eine Jacke gibt es erst 20 % Rabatt und an der Kasse noch einmal 10 % auf den reduzierten Preis. Um wie viel Prozent wird die Jacke insgesamt billiger?

Der Gesamtfaktor ist $0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$. Die Jacke kostet also 72 % des ursprünglichen Preises und wird um 28 % billiger, nicht um 30 %. Die zweite Senkung bezieht sich schon auf den kleineren Wert.

Potenzen und Wurzeln sicher anwenden

Die Potenzgesetze gelten für alle ganzzahligen Exponenten: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Wurzeln lassen sich vereinfachen, indem man den größten Quadratfaktor herauszieht: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$. Die wissenschaftliche Schreibweise $a \cdot 10^n$ mit $1 \le a$ hilft, sehr große und sehr kleine Zahlen zu vergleichen und zu multiplizieren: Mantissen multiplizieren, Exponenten addieren.

Beispiel 12: Terme mit Potenzen vereinfachen

Vereinfache $(2x^3)^2 \cdot x^{-2}$ und $\sqrt{72}$.

Zuerst die Klammer: $(2x^3)^2 = 4x^6$. Dann $4x^6 \cdot x^{-2} = 4x^{6-2} = 4x^4$. Für die Wurzel zerlegst du $72 = 36 \cdot 2$, also $\sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$.

Achtung: Typische Fehler

Erstens: $(a+b)^2$ ist nicht $a^2 + b^2$, sondern $a^2 + 2ab + b^2$. Zweitens: Der Unterschied zwischen Prozent und Prozentpunkten wird oft übersehen: Steigt ein Zinssatz von 2 % auf 3 %, so beträgt die Änderung einen Prozentpunkt, aber 50 %. Drittens: Bei der pq-Formel $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ wird das Vorzeichen von p umgedreht. Viertens: Beim Lösen einer Gleichung dürfen beide Seiten nie durch einen Term geteilt werden, der null sein kann.

Gleichungen und Gleichungssysteme

Lineare Gleichungen löst du durch Äquivalenzumformungen: Klammern auflösen, Terme zusammenfassen, x-Terme auf eine Seite bringen und durch den Faktor vor x teilen. Quadratische Gleichungen löst du durch Ausklammern, mit der pq-Formel oder mit binomischen Formeln. Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten lässt sich mit dem Einsetzungsverfahren oder dem Additionsverfahren lösen. Die Probe in beiden Gleichungen darf in der Prüfung nicht fehlen.

Beispiel 13: Gleichung mit Klammern

Löse $3(x-2)=2x+5$.

Klammer auflösen: $3x-6=2x+5$. Subtrahiere $2x$: $x-6=5$. Addiere 6: $x=11$. Probe: Links $3\cdot 9=27$, rechts $22+5=27$.

Beispiel 14: Gleichungssystem

Löse $x+y=12$ und $2x-y=3$.

Addiere beide Gleichungen: $3x=15$, also $x=5$. Aus der ersten Gleichung folgt $y=7$. Probe in der zweiten: $2\cdot 5-7=3$. Die Lösung ist $(5|7)$.

Textaufgaben im Prüfungsstil

Textaufgaben sind keine eigene Rechenart, sondern eine Übersetzung. Du liest den Text Satz für Satz, gibst den unbekannten Größen Namen und schreibst jede Information als Gleichung auf. Typische Signalwörter helfen dabei: „doppelt so groß“ bedeutet Multiplikation mit 2, „um 6 größer“ bedeutet Addition von 6, „Summe“ bedeutet plus, „Anteil“ bedeutet Prozent oder Bruch. Wenn zwei Unbekannte vorkommen, brauchst du zwei Gleichungen, bei einer Unbekannten genügt eine. Nach dem Lösen prüfst du die Lösung am Text und nicht nur an der Gleichung, denn ein Rechenfehler beim Aufstellen fällt nur bei der Textprobe auf.

Beispiel 15: Fahrradtour

Lea fährt 3 Stunden mit dem Rad. In der ersten Stunde fährt sie 4 km mehr als in der zweiten, in der dritten Stunde 2 km weniger als in der zweiten. Insgesamt fährt sie 46 km. Wie viel fährt sie in jeder Stunde?

Sei x die Strecke der zweiten Stunde. Dann gilt $(x+4)+x+(x-2)=46$, also $3x+2=46$ und $x=\frac{44}{3}$, das sind etwa 14,7 km. Die Probe ergibt: $18{,}7+14{,}7+12{,}7=46$. Die Strecken sind keine glatten Zahlen, aber das Ergebnis ist richtig.

Beispiel 16: Quadratische Gleichung im Sachzusammenhang

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 156. Wie heißen die Zahlen?

Nenne die kleinere Zahl x. Dann ist die Gleichung $x(x+1) = 156$, also $x^2 + x - 156 = 0$. Die pq-Formel gibt $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 156} = -\frac{1}{2} \pm 12{,}5$. Das sind $x = 12$ und $x = -13$. Weil natürliche Zahlen gesucht sind, bleibt nur $x = 12$. Die Zahlen sind 12 und 13. Probe: $12 \cdot 13 = 156$. Merke dir: Bei Sachaufgaben liefert die zweite Lösung der quadratischen Gleichung häufig keinen Sinn und wird begründet verworfen.

So gehst du vor: Vor dem Abgeben prüfen

1. Lies die Aufgabe noch einmal und kontrolliere, ob du alle Teilfragen beantwortet hast.
2. Überschlage das Ergebnis mit gerundeten Zahlen: 19 % von 250 € sind etwa 50 €.
3. Setze Lösungen von Gleichungen in die Ausgangsgleichung ein.
4. Kontrolliere Einheiten und Rundung: Geldbeträge auf zwei Nachkommastellen, Personen als ganze Zahlen.
5. Formuliere einen vollständigen Antwortsatz, zum Beispiel „Der Nettopreis beträgt 1000 €.“

Wusstest du? Das Licht der Sonne

Licht legt rund $3 \cdot 10^8$ Meter pro Sekunde zurück. Die Sonne ist etwa $1{,}5 \cdot 10^{11}$ Meter entfernt. Dividiert man, so erhält man $\frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 0{,}5 \cdot 10^3 = 500$ Sekunden. Das Licht braucht also gut acht Minuten bis zur Erde. Mit der wissenschaftlichen Schreibweise gelingt diese Rechnung im Kopf.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Prozentformel $W = G \cdot \frac{p}{100}$; mit Faktoren: Zunahme $1 + \frac{p}{100}$, Abnahme $1 - \frac{p}{100}$; Rückwärtsrechnen durch Teilen.
- Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$; mehrere Änderungen werden multipliziert.
- Potenzgesetze: $a^m a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$.
- Wurzeln vereinfachen: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; wissenschaftliche Schreibweise $a \cdot 10^n$ mit $1 \leq a$.
- Binomische Formeln: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; sie dienen zum Ausmultiplizieren und Faktorisieren.
- Lineare Gleichung: Äquivalenzumformungen; quadratische Gleichung: Ausklammern, binomische Formel oder pq-Formel $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.
- Lineare Gleichungssysteme mit Einsetzungs- oder Additionsverfahren lösen und die Probe in beiden Gleichungen machen.
- Textaufgaben: Größen benennen, Gleichung aufstellen, lösen, Probe,

Antwortsatz mit Einheit.

Achtung

Bei der pq-Formel das Vorzeichen von p beachten und q nicht mit dem Quadrat verwechseln. Bei der Textaufgabe nie den Antwortsatz vergessen.

Ottos Tipp

Mache bei jeder Gleichung die Probe, das bringt in der Prüfung Sicherheit. Schreibe auch Zwischenschritte auf, denn im MSA gibt es Punkte für den Lösungsweg, selbst wenn am Ende ein Rechenfehler passiert.