Lösungen - Prüfungsvorbereitung MSA: Zahlen und Terme

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) a) $W = 240 \cdot 0{,}15 = 36$. d) $W = 80 \cdot 0{,}075 = 6$. In a) und d) sind Grundwert und Prozentsatz gegeben, gesucht ist der Prozentwert: Man multipliziert den Grundwert mit dem Prozentsatz als Dezimalzahl.
b) $p = \frac{45}{180} = 0{,}25$, also $25\,\%$. Gesucht ist der Prozentsatz: Man teilt den Prozentwert durch den Grundwert. Antwort: 45 sind 25 % von 180.
c) $G = \frac{18}{0{,}12} = 150$. Gesucht ist der Grundwert: Man teilt den Prozentwert durch den Prozentsatz als Dezimalzahl. Probe: 12 % von 150 sind 18.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $80 \cdot 0{,}75 = 60$ €. 25 % Rabatt bedeutet, dass 75 % des alten Preises zu zahlen sind. Antwort: Die Jacke kostet 60 €.
b) $\frac{45-36}{45} = 0{,}20$, also $20\,\%$. Der Rabatt beträgt 9 €; man teilt ihn durch den alten Preis als Grundwert. Antwort: 20 % Rabatt.
c) $63 : 0{,}7 = 90$ €. Der neue Preis entspricht 70 % des alten Preises; deshalb teilt man durch 0,7. Antwort: Der Rucksack kostete vorher 90 €.
d) $100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 72$ €, also nur $28\,\%$ Gesamtrabatt. Zwei Rabatte werden nacheinander als Faktoren multipliziert; der zweite Rabatt bezieht sich auf den schon reduzierten Preis.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $250 \cdot 1{,}19 = 297{,}50$ €. Zum Nettopreis kommen 19 % dazu, also Faktor 1,19. Antwort: Der Schrank kostet brutto 297,50 €.
b) $59{,}50 : 1{,}19 = 50{,}00$ €. Rückwärts teilt man den Bruttopreis durch 1,19. Antwort: Der Nettopreis beträgt 50 €.
c) $18{,}50 : 1{,}07 \approx 17{,}29$ €; Steuer $\approx 1{,}21$ €. Bei Büchern gilt der Steuersatz 7 %; man teilt durch 1,07 und erhält die Steuer als Differenz.
d) Die 19 % beziehen sich auf den Nettopreis (den kleineren Grundwert), nicht auf den Bruttopreis. Deshalb darf man vom Bruttopreis nicht einfach 19 % abziehen; man erhielte einen zu kleinen Nettopreis.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $3200 \cdot 1{,}025^6 \approx 3711{,}02$ €. Beim Zinseszins wird das Kapital jedes Jahr mit 1,025 multipliziert, nach 6 Jahren also mit $1{,}025^6$.
b) $3711{,}02 - 3200 = 511{,}02$ €. Die Zinsen sind die Differenz zwischen Endkapital und Anfangskapital. Antwort: Frau Weber erhält insgesamt 511,02 € Zinsen.

c) $\frac{72}{2{,}5} \approx 29$ Jahre. Nach der 72er-Regel teilt man 72 durch den Zinssatz. Antwort: Nach knapp 29 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt.
d) $3200 + 6 \cdot 80 = 3680$ €. Ohne Zinseszins gibt es jedes Jahr nur $3200 \cdot 0{,}025 = 80$ € Zinsen. Der Zinseszins bringt also gut 31 € mehr.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $0{,}988$. Bei einer Abnahme um 1,2 % bleiben jedes Jahr 98,8 % übrig.
b) $85\,000 \cdot 0{,}988^5 \approx 80\,021$; nach 10 Jahren $\approx 75\,334$. Man multipliziert die Einwohnerzahl mit $0{,}988^5$ bzw. $0{,}988^{10}$.
c) $85\,000 - 75\,334 \approx 9666$. Der Verlust ist die Differenz zwischen Anfangs- und Endwert. Antwort: In 10 Jahren verliert die Stadt etwa 9700 Einwohner.
d) Linear: $85\,000 - 12\,000 = 73\,000$. Das ist weniger, weil der prozentuale Verlust mit der schrumpfenden Zahl abnimmt. Bei der linearen Abnahme gehen jedes Jahr 1200 Personen verloren, insgesamt also 12000.

Lösung zu Aufgabe 6

Bei gleicher Basis werden die Exponenten addiert (Multiplikation), subtrahiert (Division) oder multipliziert (Potenz einer Potenz).
a) $2^8 = 256$. Exponenten addieren: $5 + 3 = 8$.
b) $3^2 = 9$. Exponenten subtrahieren: $7 - 5 = 2$.
c) $2^6 = 64$. Exponenten multiplizieren: $3 \cdot 2 = 6$.
d) $2^{-3} = \frac{1}{8}$ und $5^0 = 1$. Ein negativer Exponent bedeutet den Kehrwert, jede Zahl außer 0 hoch 0 ergibt 1.
e) $x^6 \cdot x^{-4} = x^2$. Zuerst wird $(x^2)^3 = x^6$ berechnet, dann $6 + (-4) = 2$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s; $1{,}5 \cdot 10^8$ km; $3{,}844 \cdot 10^5$ km. In der wissenschaftlichen Schreibweise steht vor dem Komma genau eine Ziffer ungleich null; der Exponent zählt die Stellen.
b) $\frac{1{,}5 \cdot 10^8}{3{,}0 \cdot 10^5} = 0{,}5 \cdot 10^3 = 500$ s $\approx 8{,}3$ min. Zeit gleich Strecke durch Geschwindigkeit; Vorfaktoren teilen, Exponenten subtrahieren. Antwort: Das Sonnenlicht braucht gut 8 Minuten zur Erde.
c) $\frac{384\,400}{299\,792} \approx 1{,}28$ s. Antwort: Das Licht vom Mond braucht nur etwa 1,3 Sekunden.
d) $4{,}5 \cdot 10^{-4}$ und $7{,}2 \cdot 10^4$. Bei kleinen Zahlen unter 1 ist der Exponent negativ, bei großen Zahlen positiv.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$. Man zerlegt $50 = 25 \cdot 2$ und zieht die Wurzel aus 25.
b) $6\sqrt{2} \approx 8{,}49$. Hier ist $72 = 36 \cdot 2$; 36 ist der größte Quadratfaktor.
c) $\sqrt{36} = 6$. Man fasst mit dem Wurzelgesetz $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ zusammen: $18 \cdot 2 = 36$.
d) $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. Man erweitert mit $\sqrt{2}$, denn $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$; so verschwindet die Wurzel

aus dem Nenner.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $x^2+8x+16$; $4x^2-12x+9$. Erste bzw. zweite binomische Formel: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; bei $(2x-3)^2$ ist $a=2x$, $b=3$.
b) x^2-25. Dritte binomische Formel: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
c) $(x-7)(x+7)$; $(x+5)^2$. Beim Faktorisieren liest man die Formeln rückwärts: $49=7^2$ und $10x=2\cdot 5\cdot x$.
d) $(2x-3)^2$. Es gilt $4x^2=(2x)^2$, $9=3^2$ und $12x=2\cdot 2x\cdot 3$; das Minuszeichen zeigt die zweite binomische Formel.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $3x-6-2x-8=x-14$; für $x=2$: -12. Kontrolle: $0-12=-12$. Man multipliziert die Klammern aus (Vorzeichen beachten) und fasst zusammen. Die Probe mit $x=2$ im Ausgangsterm liefert denselben Wert.
b) $x^2+6x+9-x^2+6x-9=12x$; für $x=2$: 24. Kontrolle: $25-1=24$. Beide Klammern werden mit den binomischen Formeln ausgerechnet; beim Subtrahieren muss die zweite Klammer gesetzt werden.
c) $x^2-4-x^2=-4$, unabhängig von x. Mit der dritten binomischen Formel bleibt nur -4 übrig; der Term hat für jedes x denselben Wert.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $3x-6=2x+5$, $x=11$. Klammer ausmultiplizieren, dann $2x$ subtrahieren und 6 addieren. Probe: $3\cdot 9=27=22+5$.
b) $3x=18$, $x=6$. Man bringt die x-Terme nach links und die Zahlen nach rechts. Probe: $30-7=23=12+11$.
c) $x+3=2x-2$, $x=5$. Man multipliziert mit 2, um den Bruch zu beseitigen. Probe: $\frac{8}{2}=4=5-1$.
d) $0{,}4x=1{,}6$, $x=4$. Man subtrahiert 1,2 und teilt durch 0,4. Probe: $1{,}6+1{,}2=2{,}8$.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $x=3\pm 1$: $x=2$ oder $x=4$. Mit $p=-6$ und $q=8$ in die pq-Formel. Probe nach Vieta: $2+4=6$, $2\cdot 4=8$.
b) $x=-2\pm 5$: $x=3$ oder $x=-7$. Mit $p=4$ und $q=-21$. Probe: $9+12-21=0$.
c) $1-5$: keine Lösung. Die Diskriminante $(\frac{p}{2})^2-q=1-5$ ist negativ, deshalb gibt es keine reelle Lösung.
d) $x^2=4$: $x=2$ oder $x=-2$. Man teilt durch 2 und zieht die Wurzel; es gibt zwei Lösungen mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Addition: $3x=15$, $x=5$, $y=7$. Beim Addieren der Gleichungen fällt y weg. Probe:

$5 + 7 = 12$ und $10 - 7 = 3$.
b) $x = y + 2$: $3y + 6 + 2y = 16$, $y = 2$, $x = 4$. Probe: $12 + 4 = 16$. Man löst die zweite Gleichung nach x auf und setzt in die erste ein (Einsetzungsverfahren).
c) Einsetzen: $4x + 2x - 1 = 11$, $x = 2$, $y = 3$. Da y schon aufgelöst ist, setzt man direkt ein. Probe: $8 + 3 = 11$.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $2(b + b + 6) = 36$, $4b + 12 = 36$, $b = 6$; Länge 12 m. Die Länge ist $b + 6$; der Umfang ist zweimal Länge plus Breite. Antwort: Das Beet ist 6 m breit und 12 m lang.
b) $A = 6 \cdot 12 = 72$ m². Antwort: Das erste Beet hat 72 m² Fläche.
c) $x^2 + 2x - 63 = 0$, $x = -1 \pm 8$: $x = 7$ (negative Lösung entfällt). Maße 7 m und 9 m. Mit der Breite x und der Länge $x + 2$ gilt $x(x + 2) = 63$. Probe: $7 \cdot 9 = 63$.
d) $u = 2(7 + 9) = 32$ m. Antwort: Das zweite Beet hat einen Umfang von 32 m.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $3x + 10 = 2(x + 10)$. Heute ist die Mutter $3x$ Jahre alt; in 10 Jahren sind beide 10 Jahre älter.
b) $3x + 10 = 2x + 20$, $x = 10$. Man multipliziert die Klammer aus und subtrahiert $2x$ und 10.
c) Tochter 10 Jahre, Mutter 30 Jahre. Die Mutter ist dreimal so alt wie die Tochter.
d) In 10 Jahren: Tochter 20, Mutter 40, also doppelt so alt. Stimmt. Die Probe bestätigt beide Bedingungen des Rätsels.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $1200 \cdot 0{,}85 = 1020$ €. 15 % Rabatt bedeutet Faktor 0,85.
b) $1020 \cdot 0{,}98 = 999{,}60$ €. 2 % Skonto vom Rabattpreis bedeutet Faktor 0,98.
c) $999{,}60 \cdot 1{,}19 = 1189{,}52$ €. Zum Schluss kommt die Mehrwertsteuer mit dem Faktor 1,19 dazu. Antwort: Der Händler zahlt 1189,52 €.
d) $1428 - 1189{,}52 = 238{,}48$ €, das sind $\frac{238{,}48}{1428} \approx 16{,}7\,\%$. Ohne Rabatt und Skonto wären es $1200 \cdot 1{,}19 = 1428$ € gewesen; die Ersparnis bezieht man auf diesen Preis.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\frac{5800}{5000} = 1{,}16$. Der Gesamtfaktor ist Endkapital durch Anfangskapital.
b) $q = \sqrt[3]{1{,}16} \approx 1{,}0507$. In drei Jahren wird dreimal mit q multipliziert, also gilt $q^3 = 1{,}16$.
c) $p \approx 5{,}07\,\%$. Der Zinssatz ist der Anteil des Faktors über 1.
d) $5000 \cdot 1{,}0507^{10} \approx 8200$ €. Man rechnet mit dem gefundenen Jahresfaktor für 10 Jahre.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $a + k = 85$ und $9a + 6k = 600$. Die erste Gleichung zählt die Karten, die zweite die Einnahmen.

b) $9a + 6(85 - a) = 600$, $3a = 90$, $a = 30$, $k = 55$. Man löst die erste Gleichung nach k auf und setzt ein. Probe: $270 + 330 = 600$.
c) $\frac{55}{85} \approx 0{,}647$, also etwa $64{,}7\,\%$. Man teilt die Anzahl der Kinderkarten durch alle Karten.
d) $85 \cdot 7{,}50 = 637{,}50$ €. Man multipliziert die Kartenzahl mit dem Einheitspreis.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Länge und Breite verkürzen sich auf beiden Seiten um x. Der Weg nimmt an beiden Enden der Länge und der Breite jeweils x weg.
b) $(12 - 2x)(8 - 2x) = 60$, $96 - 40x + 4x^2 = 60$, $x^2 - 10x + 9 = 0$. Man multipliziert aus, subtrahiert 60 und teilt durch 4.
c) $x = 5 \pm 4$: $x = 1$ oder $x = 9$. $x = 9$ ist unmöglich (Breite wäre negativ). Der Weg ist 1 m breit. Bei $x = 9$ wäre die Restlänge $12 - 18$. Antwort: Der Weg ist 1 m breit.
d) $96 - 60 = 36$ m². Die Wegfläche ist Gesamtfläche minus Rasenfläche.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6$ l. 30 % von 2 Litern sind Frucht.
b) $0{,}6 + 0{,}8x = 0{,}5(2 + x)$. Links steht der Fruchtanteil nach dem Mischen, rechts 50 % der neuen Gesamtmenge.
c) $0{,}3x = 0{,}4$, $x = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$ Liter. Man multipliziert aus und fasst zusammen: $0{,}6 + 0{,}8x = 1 + 0{,}5x$. Antwort: Man muss etwa 1,33 Liter zugeben.
d) Gesamt $2 + \frac{4}{3} \approx 3{,}33$ l; Frucht $0{,}6 + \frac{3{,}2}{3} \approx 1{,}67$ l, das sind $50\,\%$. Die Probe bestätigt den Fruchtanteil von 50 %.