Lösungen zur Klassenarbeit - Prüfungsvorbereitung MSA: Geometrie und Stochastik

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Wand, Boden und Leiter bilden ein rechtwinkliges Dreieck; die Leiter ist die Hypotenuse. $h = \sqrt{6^2 - 1{,}8^2} = \sqrt{36 - 3{,}24} = \sqrt{32{,}76} \approx 5{,}72$ m (1 P.).
b) Der Winkel α liegt am Fuß der Leiter. Bekannt sind die Ankathete $1{,}8$ m und die Hypotenuse 6 m, also passt der Kosinus: $\cos\alpha = \frac{1{,}8}{6} = 0{,}3$, $\alpha = \cos^{-1}(0{,}3) \approx 72{,}5^\circ$ (2 P.). Viele Sicherheitsregeln empfehlen etwa 65° bis 75°, die Leiter steht also sicher.
c) Jetzt ist die Höhe 5 m vorgegeben und der Abstand am Boden gesucht: $x = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11} \approx 3{,}32$ m (1 P.). Je weiter der Fuß von der Wand steht, desto niedriger reicht die Leiter. Antwort: $5{,}72$ m; $72{,}5^\circ$; $3{,}32$ m.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Skizze: Vom Messgerät führt eine waagerechte Strecke von 40 m bis zur Turmachse (Ankathete). Senkrecht darüber liegt der Turmteil oberhalb der Gerätehöhe (Gegenkathete). Die Peillinie zur Spitze ist die Hypotenuse, der Winkel 32° liegt am Messgerät (1 P.).
b) $\tan 32^\circ = \frac{x}{40}$, also $x = 40 \cdot \tan 32^\circ \approx 40 \cdot 0{,}625 \approx 25{,}0$ m (1 P.). Dazu kommt die Gerätehöhe: $25{,}0 + 1{,}7 = 26{,}7$ m (1 P.).
c) Bei 35 m Turmhöhe liegt die Spitze $35 - 1{,}7 = 33{,}3$ m über dem Gerät. $\tan\alpha = \frac{33{,}3}{40} = 0{,}8325$, also $\alpha \approx 39{,}8^\circ$ (1 P.). Wer die Gerätehöhe vergisst, erhält falsch $41{,}2^\circ$. Antwort: Der Turm ist etwa $26{,}7$ m hoch; bei 35 m Höhe wäre der Peilwinkel etwa $39{,}8^\circ$.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Zylinder: $V_Z = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi \approx 502{,}7\,\text{cm}^3$ (1 P.).
b) Die Oberfläche besteht aus Boden, Deckel und Mantel. $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 32\pi + 80\pi = 112\pi \approx 351{,}9\,\text{cm}^2$ (1 P.). Der Mantel ist abgewickelt ein Rechteck mit der Breite $2\pi r \approx 25{,}1$ cm und der Höhe 10 cm.
c) Kegel: $V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 160\pi \approx 167{,}6\,\text{cm}^3$ (1 P.). Vergleich: $\frac{V_Z}{V_K} = \frac{502{,}7}{167{,}6} = 3$. Bei gleicher Grundfläche und gleicher Höhe hat der Kegel genau ein Drittel des Zylindervolumens; anschaulich passen drei Kegelfüllungen in den Zylinder (1 P.). Antwort: $502{,}7\,\text{cm}^3$; $351{,}9\,\text{cm}^2$; $167{,}6\,\text{cm}^3$, Verhältnis $3 : 1$.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

Insgesamt sind 8 Kugeln in der Urne; beim zweiten Zug ohne Zurücklegen nur noch 7.
a) Pfad gelb-gelb: $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$ (1 P.).
b) Verschiedene Farben ergeben die Pfade gelb-grün $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$ und grün-gelb $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$. Summe: $\frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$ (2 P.).
c) „Mindestens eine grüne“ ist das Gegenereignis von „zwei gelbe“: $1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} \approx 0{,}643$ (1 P.). Kontrolle direkt: $P(\text{grün-grün}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$, dazu $\frac{30}{56}$ aus b) ergibt $\frac{36}{56} = \frac{9}{14}$. Alle vier Pfade zusammen: $\frac{20+15+15+6}{56} = 1$. Antwort: $35{,}7\,\%$; $53{,}6\,\%$; $64{,}3\,\%$.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Der Ring ist die große Kreisfläche ohne die kleine:
$A = \pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2 = 225\pi - 25\pi = 200\pi \approx 628{,}3\,\text{cm}^2$ (1 P.).
b) Jeder Punkt der Scheibe ist gleich wahrscheinlich, also ist die Trefferwahrscheinlichkeit ein Flächenverhältnis: $P = \frac{25\pi}{225\pi} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ (1 P.). Merke: Der Radius ist ein Drittel, die Fläche aber nur ein Neuntel.
c) Die Würfe sind unabhängig. Gegenereignis: zweimal nicht innen, mit $\frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{64}{81}$. Also $P(\text{mindestens einmal innen}) = 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81} \approx 0{,}210$ (2 P.). Kontrolle über alle Pfade: $2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{81} = \frac{16+1}{81}$. Antwort: $628{,}3\,\text{cm}^2$; etwa $11{,}1\,\%$; etwa $21\,\%$.