Lernzettel - Prüfungsvorbereitung MSA: Geometrie und Stochastik

Klasse: Klasse 10

Im Bereich Geometrie und Stochastik des MSA begegnen dir der Satz des Pythagoras, die Winkelfunktionen, Flächen und Körper und einfache Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der übliche Lösungsweg lautet: Skizze, Formel, Einsetzen, Ergebnis, Antwortsatz.

Einstieg: Höhen messen ohne Klettern

Wie hoch ist der Kirchturm deiner Stadt? Du musst nicht hinaufklettern. Du misst den Abstand zum Turm, visierst die Spitze an und liest den Winkel ab. Aus diesen beiden Angaben berechnest du mit dem Tangens die Höhe. Mit Pythagoras, Sinus, Kosinus und Tangens lassen sich unzählige Längen und Winkel bestimmen, die du nicht messen kannst. Dazu kommen Kreise, Körper und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. In diesem Kapitel übst du die geometrischen und stochastischen Aufgabentypen des Mittleren Schulabschlusses.

Satz des Pythagoras

Satz: Satz des Pythagoras

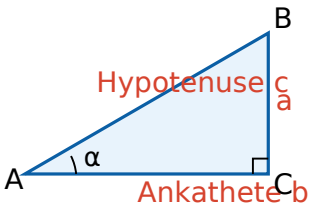
In einem rechtwinkligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Dabei ist c die **Hypotenuse** (gegenüber dem rechten Winkel), a und b sind die **Katheten**. Es folgt $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Beispiel 1: Leiter

Eine 5 m lange Leiter steht mit dem Fuß 1,5 m von der Wand entfernt. Wie hoch reicht sie?

$h = \sqrt{25 - 2{,}25} = \sqrt{22{,}75} \approx 4{,}77$ m.

Sinus, Kosinus und Tangens



Definition: Sinus, Kosinus, Tangens

Für den Winkel α im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Hinweis

Stelle den Taschenrechner auf DEG. Winkel aus Seiten berechnest du mit $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$. Gegenkathete und Ankathete hängen vom gewählten Winkel ab: Die Gegenkathete liegt gegenüber, die Ankathete liegt am Winkel an.

Beispiel 2: Seite berechnen

Hypotenuse 10 cm, $\alpha = 35°$. Berechne a und b.

$a = 10 \cdot \sin 35° \approx 5{,}74$ cm und $b = 10 \cdot \cos 35° \approx 8{,}19$ cm.

Beispiel 3: Winkel berechnen

Die Katheten sind 3 cm und 4 cm. Berechne α.

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$, also $\alpha = \tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}9°$. Eine Straßensteigung von 12 % entspricht $\tan\alpha = 0{,}12$, also $\alpha \approx 6{,}8°$.

Beispiel 4: Höhe eines Baumes

Aus 20 m Abstand sieht man die Spitze unter $40°$. Wie hoch ist der Baum (ohne Augenhöhe)?

$h = 20 \cdot \tan 40° \approx 16{,}8$ m.

Achtung

Im Satz des Pythagoras nicht die Hypotenuse mit einer Kathete verwechseln. Stelle den Taschenrechner auf DEG. Verwechsle bei Körpern nicht die Mantellinie s mit der Höhe h.

Abstand im Koordinatensystem

Satz: Abstand zweier Punkte

Für $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ gilt $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$. Zeichne ein Steigungsdreieck, dann siehst du die beiden Katheten. Für $A(1|2)$ und $B(4|6)$ ist $d = \sqrt{9+16} = 5$.

Kreis und Körper

Satz: Kreis

$U = 2\pi r$ und $A = \pi r^2$. Ein Sektor mit dem Winkel α hat die Fläche $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ und die Bogenlänge $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$.

Satz: Körperformeln

- Zylinder: $V = \pi r^2 h$, $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
- Kegel: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $s = \sqrt{r^2 + h^2}$, $M = \pi r s$
- Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $O = 4\pi r^2$
- Quader: Raumdiagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Beispiel 5: Raumdiagonale

Berechne die Raumdiagonale für $a = 3$, $b = 4$, $c = 12$.

$d = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Wahrscheinlichkeit

Satz: Laplace-Experiment

Bei gleich wahrscheinlichen Ergebnissen gilt $P(E) = \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}}$. Beim Würfel ist $P(\text{gerade}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Bei mehrstufigen Experimenten wird entlang eines Pfades multipliziert, Pfade zum selben Ereignis werden addiert.

Beispiel 6: Zweimal würfeln

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch, für die Augensumme 7 und für die Augensumme 12?

Es gibt $6 \cdot 6 = 36$ gleich wahrscheinliche Paare. Pasch: 6 Paare, $P = \frac{1}{6}$. Summe 7: 6 Paare, $P = \frac{1}{6}$. Summe 12: nur $(6|6)$, $P = \frac{1}{36}$.

Beispiel 7: Urne ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält 4 rote und 6 blaue Kugeln. Zweimal ohne Zurücklegen: $P(\text{rot}, \text{rot})$?

$\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$. Mit Zurücklegen wäre es $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

So gehst du vor: Sachaufgaben im MSA

1. Lies die Aufgabe, zeichne eine Skizze und trage alle Größen ein.
2. Wähle das Verfahren: rechtwinkliges Dreieck (Pythagoras oder Winkelfunktion), Körper (Formel), Zufall (Baumdiagramm).
3. Rechne mit allen Stellen des Taschenrechners und runde erst am Ende.
4. Schreibe einen Antwortsatz mit Einheit.

Beispiel 8: Kegel

Ein Kegel hat $r = 3$ cm und $h = 4$ cm. Berechne die Mantellinie, das Volumen und die Mantelfläche.

$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ cm.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi \approx 37{,}7\ \text{cm}^3$.

$M = \pi r s = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi \approx 47{,}1\ \text{cm}^2$.

Beispiel 9: Kreissektor

Ein Kreisausschnitt hat $r = 6$ cm und $\alpha = 60^\circ$. Berechne Fläche und Bogenlänge.

Der Sektor ist $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ des Kreises. $A = \pi \cdot 36 \cdot \frac{1}{6} = 6\pi \approx 18{,}85\ \text{cm}^2$ und $b = 2\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = 2\pi \approx 6{,}28$ cm.

Hinweis

Pythagoras verbindet die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, Sinus, Kosinus und Tangens verbinden Winkel und Seitenverhältnisse. Kreis und Körper berechnest du mit festen Formeln, bei zusammengesetzten Körpern addierst du Teilvolumina. In der Stochastik zählst du günstige Ergebnisse oder nutzt Pfadregeln im Baumdiagramm.

Welches Werkzeug im rechtwinkligen Dreieck?

In einem rechtwinkligen Dreieck gibt es zwei Werkzeuge. Kennst du *zwei Seiten* und suchst die dritte, verwendest du den Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Kennst du *eine Seite und einen spitzen Winkel* und suchst eine Seite, oder kennst du *zwei Seiten* und suchst einen Winkel, verwendest du Sinus, Kosinus oder Tangens. Die Zuordnung der Seiten hängt vom Winkel ab, den du betrachtest: Die *Gegenkathete* liegt gegenüber dem Winkel, die *Ankathete* liegt an ihm an, die *Hypotenuse* liegt gegenüber dem rechten Winkel. Mit $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ und $\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ kannst du jedes Dreieck lösen. Achte darauf, dass dein Taschenrechner im Gradmaß (DEG) steht.



Beispiel 10: Steigungswinkel einer Rampe

Eine Rampe überwindet 1,2 m Höhenunterschied auf 5 m waagerechter Länge. Wie groß ist der Steigungswinkel, und welche Steigung in Prozent hat sie?

Die Höhe ist die Gegenkathete, die waagerechte Länge die Ankathete. Also $\tan\alpha = \frac{1{,}2}{5} = 0{,}24$ und $\alpha = \tan^{-1}(0{,}24) \approx 13{,}5^\circ$. Die Steigung in Prozent ist der Quotient selbst: $0{,}24 = 24\,\%$. Beachte: Steigung und Winkel sind verschieden. Eine Steigung von 100 % entspricht einem Winkel von 45°, nicht von 90°.

Beispiel 11: Höhe eines Turms

Vom Punkt P, der 25 m vom Fuß eines Turms entfernt liegt, wird die Turmspitze unter dem Winkel 38° angepeilt. Das Messgerät befindet sich in 1,6 m Höhe. Wie hoch ist der Turm?

Die Höhe über dem Messgerät ist die Gegenkathete des Winkels 38°, der Abstand 25 m die Ankathete. Aus $\tan 38^\circ = \frac{h}{25}$ folgt $h = 25 \cdot \tan 38^\circ \approx 25 \cdot 0{,}781 = 19{,}5$ m. Dazu kommt die Höhe des Messgeräts: Der Turm ist etwa $19{,}5 + 1{,}6 = 21{,}1$ m hoch. Der häufigste Fehler ist, diese Augenhöhe zu vergessen.

Beispiel 12: Kreisring und Zylinder

Ein Metallring hat den äußeren Radius 5 cm und den inneren Radius 3 cm. Welche Fläche hat er? Wie viel Kubikzentimeter Metall enthält er bei einer Dicke von 2 cm?

Die Ringfläche ist die Differenz der Kreisflächen: $A = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2 = 16\pi \approx 50{,}3$ cm². Das Volumen ist Fläche mal Dicke: $V = 16\pi \cdot 2 \approx 100{,}5$ cm³. Alternativ könntest du das Volumen als Differenz zweier Zylinder berechnen.

Achtung: Typische Fehler in der Geometrie

Erstens: Wer in der Formel $A = \pi r^2$ den Durchmesser statt des Radius einsetzt, erhält die vierfache Fläche. Zweitens: Beim Zylindervolumen müssen alle Längen in derselben Einheit stehen. Rechne am Ende $1\,000$ cm³ in 1 Liter um. Drittens: Der Satz des Pythagoras gilt nur im rechtwinkligen Dreieck, und die Hypotenuse ist stets die längste Seite. Viertens: Bei der Winkelberechnung ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$) musst du die Umkehrtasten benutzen und nicht den Quotienten noch einmal in die Funktion einsetzen.

Wahrscheinlichkeit: Zweistufige Zufallsexperimente

Bei einem Laplace-Experiment sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, und es gilt $P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}}$. Bei zweistufigen Experimenten zeichnest du ein Baumdiagramm und wendest die Pfadregeln an: Entlang eines Pfades multiplizierst du, mehrere Pfade zum selben Ereignis addierst du. Bei Ziehen ohne Zurücklegen ändern sich die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe. Ein nützlicher Trick ist das Gegenereignis: „mindestens eine 6“ berechnest du als $1 - P(\text{keine } 6)$.

Beispiel 13: Zwei Würfel

Zwei faire Würfel werden geworfen. Wie wahrscheinlich ist die Augensumme 7, und wie wahrscheinlich ist mindestens eine Sechs?

Es gibt $6 \cdot 6 = 36$ gleich wahrscheinliche Ergebnisse. Die Summe 7 entsteht aus $(1|6), (2|5), (3|4), (4|3), (5|2), (6|1)$, das sind 6 Ergebnisse: $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Für „mindestens eine Sechs“ ist das Gegenereignis „keine Sechs“ mit $5 \cdot 5 = 25$ Ergebnissen. Also $P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}31$.

So gehst du vor: Geometrie-Sachaufgaben

1. Fertige eine Skizze an und beschrifte alle gegebenen und gesuchten Größen.
2. Erkenne die Teilfigur: rechtwinkliges Dreieck, Kreis, Prisma, Zylinder, Kegel oder Kugel.
3. Wähle die Formel: Pythagoras, Winkelfunktionen oder Flächen- und Volumenformel.
4. Rechne mit Einheiten und rechne am Ende in die verlangte Einheit um.
5. Prüfe das Ergebnis mit einer Überschlagsrechnung und schreibe einen Antwortsatz.

Körper in der Prüfung

Bei Körperaufgaben ist meist ein Alltagsgegenstand beschrieben: eine Getränkedose, eine Eistüte, ein Silo oder ein Ball. Erkenne zuerst, aus welchen Grundkörpern er besteht, und schreibe die passenden Formeln auf. Viele Prüflinge verlieren Punkte, weil sie bei zusammengesetzten Körpern Flächen mitzählen, die innen liegen, zum Beispiel die Kreisfläche zwischen Zylinder und Halbkugel. Frage dich bei der Oberfläche immer, welche Teile man von außen sieht und anstreichen würde.

Beispiel 14: Eistüte

Eine Eistüte hat den Radius 3 cm und die Höhe 10 cm. Wie groß ist die Mantelfläche, und wie viel Eis passt hinein?

Zuerst berechnest du die Mantellinie mit Pythagoras: $s = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109} \approx 10{,}44$ cm. Die Mantelfläche ist $M = \pi r s \approx \pi \cdot 3 \cdot 10{,}44 \approx 98{,}4$ cm². Das Volumen beträgt $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 10 \approx 94{,}2$ cm³, das sind etwa 0,09 Liter.

Beispiel 15: Dreieck im Koordinatensystem

Zeige, dass das Dreieck $A(1|1)$, $B(5|1)$, $C(5|4)$ rechtwinklig ist, und berechne seinen Umfang.

Die Strecke AB liegt waagerecht mit $AB = 4$, die Strecke BC senkrecht mit $BC = 3$. Also ist der Winkel bei B ein rechter. Die Hypotenuse ist $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Der Umfang beträgt $4 + 3 + 5 = 12$. Die Fläche ist $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

Hinweis: Rundung und Einheiten

Rechne mit ungerundeten Zwischenergebnissen und runde erst am Ende, sonst addieren sich die Rundungsfehler. Gib Längen in Metern oder Zentimetern, Flächen in Quadrateinheiten und Volumina in Kubikeinheiten an. Eine Fläche in Metern oder ein Volumen ohne Einheit gilt in der Prüfung als Fehler. Prüfe am Ende außerdem, ob dein Ergebnis zur Größenordnung passt: Eine Leiter kann nicht höher reichen als lang sie ist.

Wusstest du? Eratosthenes misst die Erde

Vor über 2000 Jahren bestimmte der griechische Gelehrte Eratosthenes den Umfang der Erde. Er wusste, dass die Sonne in Syene zur Mittagszeit senkrecht steht, in Alexandria aber einen Schatten wirft, der einem Winkel von etwa $7{,}2^\circ$ entspricht. Das ist der fünfzigste Teil des Vollkreises. Mit dem Abstand der Städte konnte er den Erdumfang abschätzen, und sein Ergebnis kommt dem heutigen Wert von etwa 40 000 km erstaunlich nahe. Er brauchte dazu nur Winkel, Proportionen und einen Stock.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck: $a^2 + b^2 = c^2$ (c Hypotenuse); Abstand zweier Punkte $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$; Winkel mit $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$.
- Steigung in Prozent $= \tan\alpha \cdot 100\,\%$; 100 % entsprechen 45°.
- Kreis: $U = 2\pi r$, $A = \pi r^2$; Kreisring $A = \pi(R^2 - r^2)$.
- Zylinder $V = \pi r^2 h$, $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$; Kegel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $M = \pi r s$ mit $s = \sqrt{r^2 + h^2}$; Kugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $O = 4\pi r^2$.
- Raumdiagonale eines Quaders: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
- Laplace: $P(E) = \frac{\text{günstige}}{\text{alle}}$; Pfadregeln: multiplizieren längs, addieren zwischen den Pfaden; Gegenereignis .
- Bei Sachaufgaben immer Skizze, Einheiten kontrollieren und Antwortsatz schreiben.

Achtung

Beim Ziehen ohne Zurücklegen musst du die Wahrscheinlichkeiten anpassen. Beim Kegel brauchst du für die Mantelfläche die Mantellinie s, nicht die Höhe h.

Ottos Tipp

Zeichne bei jeder Geometrieaufgabe eine Skizze und beschrifte den gegebenen Winkel. Dann ordnest du die Seiten richtig zu: Gegenkathete liegt gegenüber vom Winkel, Ankathete liegt am Winkel an. Bei Wahrscheinlichkeiten hilft ein Baumdiagramm immer.