# Lösungen - Prüfungsvorbereitung MSA: Geometrie und Stochastik

Klasse: Klasse 10

## Lösung zu Aufgabe 1

a) a) $c = \sqrt{36 + 64} = 10$ cm. b) $c = \sqrt{25 + 144} = 13$ cm. Gesucht ist jeweils die Hypotenuse $c$, deshalb werden die Quadrate der Katheten addiert und dann die Wurzel gezogen. Beide Dreiecke sind pythagoreische Tripel (6-8-10 und 5-12-13).
b) $b = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm. Gegeben sind Hypotenuse und eine Kathete; die fehlende Kathete erhält man durch Subtrahieren der Quadrate. Antwort: $b = 12$ cm.
c) $a = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51} \approx 7{,}14$ cm. Auch hier wird subtrahiert; da 51 keine Quadratzahl ist, wird auf zwei Nachkommastellen gerundet. Antwort: $a \approx 7{,}14$ cm.

## Lösung zu Aufgabe 2

a) $h = \sqrt{25 - 2{,}25} = \sqrt{22{,}75} \approx 4{,}77$ m. Leiter (Hypotenuse), Abstand zur Wand und Höhe bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Antwort: Die Leiter reicht etwa 4,77 m hoch.
b) $\cos\alpha = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$, $\alpha \approx 72{,}5°$. Ja, der Winkel liegt zwischen $65°$ und $75°$. Der Abstand zur Wand ist die Ankathete des Winkels am Boden, die Leiter die Hypotenuse; deshalb nimmt man den Kosinus.
c) $x = \sqrt{25 - 17{,}64} = \sqrt{7{,}36} = 2{,}71$ m. Jetzt ist die Höhe 4,2 m gegeben und der Abstand gesucht. Antwort: Der Fuß steht etwa 2,71 m von der Wand entfernt.
d) $\sin\alpha = \frac{4{,}2}{5} = 0{,}84$, $\alpha \approx 57{,}1°$. Die Höhe ist die Gegenkathete, deshalb nimmt man den Sinus. Der Winkel liegt unter $65°$, die Leiter steht also zu flach und könnte wegrutschen.

## Lösung zu Aufgabe 3

a) $a = 12 \cdot \sin 35° \approx 6{,}88$ cm; $b = 12 \cdot \cos 35° \approx 9{,}83$ cm. Die Hypotenuse ist gegeben: Gegenkathete mit dem Sinus, Ankathete mit dem Kosinus. Kontrolle: $6{,}88^2 + 9{,}83^2 \approx 144$.
b) $a = 7 \cdot \tan 50° \approx 8{,}34$ cm; $c = \frac{7}{\cos 50°} \approx 10{,}89$ cm. Die Ankathete ist gegeben: Gegenkathete mit dem Tangens, Hypotenuse mit dem Kosinus ($c = \frac{b}{\cos\alpha}$).
c) $b = 9 \cdot \tan 62° \approx 16{,}93$ cm; $c = \frac{9}{\cos 62°} \approx 19{,}17$ cm. Gleicher Rechenweg wie in b); die Hypotenuse muss die längste Seite sein, das ist erfüllt.

## Lösung zu Aufgabe 4

a) $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, $\alpha \approx 22{,}6°$. Gegenkathete und Ankathete sind gegeben, deshalb Tangens und dann $\tan^{-1}$.
b) $\sin\alpha = 0{,}7$, $\alpha \approx 44{,}4°$. Gegenkathete und Hypotenuse sind gegeben, deshalb Sinus:

$\frac{7}{10} = 0{,}7$, dann $\sin^{-1}$.
c) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\alpha \approx 41{,}4°$. Ankathete und Hypotenuse sind gegeben, deshalb Kosinus: $\frac{6}{8} = 0{,}75$, dann $\cos^{-1}$.

## Lösung zu Aufgabe 5

a) $h = 30 \cdot \tan 38° \approx 23{,}4$ m; mit Augenhöhe $\approx 25{,}0$ m. Der Abstand ist die Ankathete, die Höhe über dem Messgerät die Gegenkathete. Zum Schluss addiert man die Gerätehöhe von 1,6 m. Antwort: Der Baum ist etwa 25 m hoch.
b) $x = \frac{43{,}4}{\tan 52°} \approx 33{,}9$ m. Über dem Messgerät liegen $45 - 1{,}6 = 43{,}4$ m. Gesucht ist die Ankathete, deshalb teilt man durch den Tangens. Antwort: Der Beobachter steht etwa 33,9 m vom Turm entfernt.
c) Bei doppeltem Abstand $2x \approx 67{,}8$ m gilt $\tan\alpha = \frac{43{,}4}{67{,}8} \approx 0{,}640$, also $\alpha \approx 32{,}6°$. Der Winkel wird kleiner, er halbiert sich aber nicht, weil der Tangens nicht proportional zum Winkel ist.

## Lösung zu Aufgabe 6

a) $\alpha = \tan^{-1}(0{,}12) \approx 6{,}8°$. Die Steigung in Prozent ist der Tangens des Winkels: 12 % bedeutet $\tan\alpha = 0{,}12$.
b) $h = 2000 \cdot \sin 6° \approx 209$ m. Die 2 km werden entlang der Straße gemessen, sie sind also die Hypotenuse; die Höhe ist die Gegenkathete. Antwort: etwa 209 Höhenmeter.
c) $\tan 8° \approx 0{,}141$, also $14{,}1\,\%$. Man berechnet den Tangens und schreibt ihn in Prozent.
d) $\tan 45° = 1$, also 100 %. Bei $45°$ sind Höhe und waagerechte Strecke gleich lang; 100 % bedeutet also nicht senkrecht.

## Lösung zu Aufgabe 7

a) $d = \sqrt{36 + 64} = 10$. Die Koordinatendifferenzen 6 und 8 sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks.
b) $d = \sqrt{64 + 36} = 10$. Hier sind die Differenzen $5 - (-3) = 8$ und $-2 - 4 = -6$; das Vorzeichen spielt beim Quadrieren keine Rolle.
c) $PQ = 6$; $PS = \sqrt{9 + 16} = 5$; $QS = \sqrt{9 + 16} = 5$. Umfang 16. Höhe 4, Fläche $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. Das Dreieck ist gleichschenklig; die Höhe von $S$ auf $PQ$ ist die $y$-Koordinate 4. Antwort: Umfang 16 LE, Fläche 12 FE.

## Lösung zu Aufgabe 8

a) $U = 2\pi \cdot 6 \approx 37{,}70$ cm; $A = \pi \cdot 36 \approx 113{,}10$ cm². Man setzt $r = 6$ cm in $U = 2\pi r$ und $A = \pi r^2$ ein.
b) $r = 7$: $U = 14\pi \approx 43{,}98$ cm; $A = 49\pi \approx 153{,}94$ cm². Zuerst wird der Radius aus dem Durchmesser bestimmt: $r = \frac{d}{2} = 7$ cm.
c) $r = \frac{31{,}4}{2\pi} \approx 5{,}00$ cm (also 5 cm). Man stellt $U = 2\pi r$ nach $r$ um.
d) $r = \sqrt{\frac{200}{\pi}} \approx 7{,}98$ cm. Man stellt $A = \pi r^2$ nach $r^2$ um und zieht die Wurzel. Probe:

$\pi \cdot 7{,}98^2 \approx 200$.

## Lösung zu Aufgabe 9

a) Klein: $\pi \cdot 10^2 \approx 314{,}2$ cm²; groß: $\pi \cdot 15^2 \approx 706{,}9$ cm². Der Radius ist jeweils der halbe Durchmesser.
b) $\frac{706{,}9}{8} \approx 88{,}4$ cm². Ein Stück ist ein Achtel der großen Pizza.
c) Klein: $\frac{6}{3{,}142} \approx 1{,}91$ € pro 100 cm². Groß: $\frac{9}{7{,}069} \approx 1{,}27$ €. Die große Pizza ist günstiger. Man vergleicht den Preis pro 100 cm². Der Durchmesser ist nur 1,5-mal so groß, die Fläche aber 2,25-mal so groß.
d) Zwei kleine: $628{,}3$ cm² für 12 €. Die große Pizza bietet mehr Fläche ($706{,}9$ cm²) für weniger Geld (9 €). Antwort: Die große Pizza ist das bessere Angebot.

## Lösung zu Aufgabe 10

a) $V = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 12 \approx 461{,}8$ cm³ (etwa $0{,}46$ l); $O = 2\pi \cdot 12{,}25 + 2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 12 \approx 340{,}9$ cm². Volumen: Grundfläche mal Höhe; Oberfläche: zwei Kreise plus Mantel $2\pi rh$.
b) $s = \sqrt{9 + 100} \approx 10{,}44$ cm; $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 10 \approx 94{,}2$ cm³; $M = \pi \cdot 3 \cdot 10{,}44 \approx 98{,}4$ cm²; mit Grundfläche $O \approx 126{,}7$ cm². Die Mantellinie $s$ erhält man mit Pythagoras aus Radius und Höhe; der Kegel hat ein Drittel des Volumens des passenden Zylinders.
c) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 \approx 5575$ cm³; $O = 4\pi \cdot 121 \approx 1521$ cm². Man setzt $r = 11$ cm in die Kugelformeln ein; 5575 cm³ sind etwa 5,6 Liter.

## Lösung zu Aufgabe 11

a) $d = \sqrt{3600 + 1600 + 900} = \sqrt{6100} \approx 78{,}1$ cm. Die Raumdiagonale berechnet man mit $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Antwort: Der längste Stab ist etwa 78 cm lang.
b) $d = \sqrt{64 + 36 + 25} = \sqrt{125} \approx 11{,}18$ m. Antwort: Die Raumdiagonale des Zimmers ist etwa 11,18 m lang.
c) Nein, $80$ cm $> 78{,}1$ cm. Der Stab ist länger als die Raumdiagonale und passt deshalb auch schräg nicht hinein.
d) Nein, $12$ m $> 11{,}18$ m. Auch hier ist die Länge größer als die Raumdiagonale.

## Lösung zu Aufgabe 12

a) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Sechs der 36 gleich wahrscheinlichen Ergebnisse haben die Summe 7.
b) Günstig: 10 (3 Fälle), 11 (2), 12 (1): $\frac{6}{36} \approx 0{,}167$. Man zählt die günstigen Felder in der Tabelle und teilt durch 36.
c) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Ein Pasch sind die sechs Felder der Diagonale.
d) $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$. Man rechnet mit dem Gegenereignis: Bei $5 \cdot 5 = 25$ Ergebnissen kommt keine 6 vor.

## Lösung zu Aufgabe 13

a) Erste Stufe: rot $\frac{6}{10}$, blau $\frac{4}{10}$. Nach rot: rot $\frac{5}{9}$, blau $\frac{4}{9}$. Nach blau: rot $\frac{6}{9}$, blau $\frac{3}{9}$. Nach dem ersten Zug sind nur noch 9 Kugeln in der Urne, eine Farbe hat eine Kugel weniger.
b) $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$. Erste Pfadregel: entlang des Pfades multiplizieren.
c) $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{48}{90} \approx 0{,}533$. Zwei Pfade (rot-blau und blau-rot) werden nach der zweiten Pfadregel addiert.
d) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Man rechnet mit dem Gegenereignis „zwei rote Kugeln“.

## Lösung zu Aufgabe 14

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{9+4+1}{36} = \frac{14}{36} \approx 0{,}389$. Zwei gleiche Farben: rot-rot, blau-blau oder grün-grün; man multipliziert jeweils und addiert.
b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Entlang des Pfades multiplizieren; die Reihenfolge ist festgelegt.
c) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$. „Mindestens einmal grün“ ist das Gegenereignis von „zweimal nicht grün“.
d) $\frac{1}{4} \cdot 360 = 90$ Mal. Die erwartete Anzahl ist Anzahl der Durchgänge mal Wahrscheinlichkeit; zweimal rot hat $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

## Lösung zu Aufgabe 15

a) $s = \sqrt{4^2 + 2{,}8^2} = \sqrt{23{,}84} \approx 4{,}88$ m. Halbe Giebelbreite (4 m) und Höhe (2,8 m) sind die Katheten, der Sparren ist die Hypotenuse.
b) $2 \cdot 4{,}88 \cdot 10 \approx 97{,}7$ m²; Kosten $\approx 1367$ €. Das Dach besteht aus zwei Rechtecken; man multipliziert die Fläche mit dem Preis pro m².
c) $\tan\alpha = \frac{2{,}8}{4} = 0{,}7$, $\alpha \approx 35{,}0°$. Die Dachneigung ist der Winkel an der Traufe; Gegenkathete 2,8 m, Ankathete 4 m.
d) $V = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2{,}8 \cdot 10 = 112$ m³. Der Dachraum ist ein dreiseitiges Prisma: Giebeldreieck mal Hauslänge.

## Lösung zu Aufgabe 16

a) $V = \pi \cdot 6{,}25 \cdot 6 \approx 117{,}8$ m³ $\approx 117\,810$ Liter. Gefüllt wird nur der Zylinder; 1 m³ sind 1000 Liter.
b) $\frac{117\,810}{20} \approx 5890$ s $\approx 98$ min. Man teilt das Volumen durch die Pumpleistung pro Sekunde und rechnet in Minuten um.
c) $M_Z = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 6 \approx 94{,}2$ m²; $s = \sqrt{6{,}25 + 2{,}25} \approx 2{,}92$ m; $M_K = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}92 \approx 22{,}9$ m². Zylindermantel $2\pi rh$; beim Kegeldach braucht man die Mantellinie aus Pythagoras.
d) $94{,}25 + 22{,}9 \approx 117{,}2$ m²; $\frac{117{,}2}{8} \approx 14{,}6$, also 15 Liter. Man teilt die Gesamtfläche durch die Ergiebigkeit und rundet auf ganze Liter auf.

## Lösung zu Aufgabe 17

a) $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$; $BC = \sqrt{36 + 64} = 10$. Länge $= 20$ km. Man bildet die

Koordinatendifferenzen und wendet Pythagoras an.
b) $AC = 12$ km, also $8$ km kürzer. Der direkte Weg liegt auf der $x$-Achse.
c) $\tan\alpha = \frac{8}{6}$, $\alpha \approx 53{,}1°$. Am Punkt $A$ ist die Höhe 8 die Gegenkathete, der waagerechte Abstand 6 die Ankathete.
d) $\frac{20}{4} = 5$ h. Fläche: $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ km². Bei 4 km/h dauert die Wanderung 5 Stunden; das Dreieck hat die Grundseite 12 km und die Höhe 8 km.

## Lösung zu Aufgabe 18

a) $\sqrt{20^2 + 3{,}66^2} \approx 20{,}33$ m. Der halbe Torabstand (3,66 m) und die Entfernung zur Tormitte sind die Katheten.
b) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3{,}66}{20}$, $\alpha = 2 \cdot \tan^{-1}(0{,}183) \approx 20{,}7°$. Die Linie zur Tormitte halbiert den Sehwinkel; man rechnet den halben Winkel mit dem Tangens und verdoppelt.
c) $\alpha = 2 \cdot \tan^{-1}(0{,}366) \approx 40{,}2°$. Bei halber Entfernung wird der Winkel fast doppelt so groß.
d) $d = \frac{3{,}66}{\tan 7{,}5°} \approx 27{,}8$ m. Man stellt $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3{,}66}{d}$ nach $d$ um.

## Lösung zu Aufgabe 19

a) $V = \pi \cdot 4 \cdot 8 + \frac{2}{3}\pi \cdot 8 \approx 117{,}3$ m³. Zylindervolumen plus Halbkugel $\frac{2}{3}\pi r^3$.
b) $\pi \cdot 32 \approx 100{,}5$ m³ $\cdot 750$ kg $\approx 75{,}4$ t. Man multipliziert das Zylindervolumen mit 750 kg pro m³ und rechnet in Tonnen um.
c) $2\pi \cdot 2 \cdot 8 + 2\pi \cdot 4 \approx 125{,}7$ m². Außenfläche: Zylindermantel plus Halbkugelfläche $2\pi r^2$; der Boden zählt nicht.
d) $\frac{125{,}7}{8} \approx 15{,}7$, also 16 Liter. Man teilt die Fläche durch 8 m² pro Liter und rundet auf.

## Lösung zu Aufgabe 20

a) $A_{ges} = \pi \cdot 400 \approx 1256{,}6$ cm²; innen: $100\pi \approx 314{,}2$ cm²; Bull: $4\pi \approx 12{,}6$ cm². Man berechnet drei Kreisflächen mit $A = \pi r^2$.
b) Innerer Kreis: $\frac{100\pi}{400\pi} = 0{,}25$. Bull: $\frac{4\pi}{400\pi} = 0{,}01$. Die Wahrscheinlichkeit ist Teilfläche durch Gesamtfläche; $\pi$ kürzt sich heraus.
c) $1 - 0{,}99^2 = 0{,}0199$. Mindestens ein Bull bei zwei Würfen über das Gegenereignis „zweimal kein Bull“.
d) $500 \cdot 0{,}01 = 5$ Treffer. Erwartungswert: Anzahl der Würfe mal Wahrscheinlichkeit.