Lösungen zur Klassenarbeit - Prüfungsvorbereitung MSA: Funktionen

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Steigung aus den Koordinatendifferenzen: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2$ (1 P.). Den Achsenabschnitt bestimmt man durch Einsetzen von A in $y = -2x + b$: $4 = -2 \cdot (-1) + b = 2 + b$, also $b = 2$. Gleichung: $y = -2x + 2$ (1 P.). Probe mit B: $-2 \cdot 2 + 2 = -2$, stimmt.
b) Nullstelle: $-2x + 2 = 0$, also $2x = 2$ und $x = 1$. Der Graph schneidet die x-Achse in $N(1|0)$ (1 P.).
c) Punktprobe: $y(3) = -2 \cdot 3 + 2 = -4$. Das ist genau die y-Koordinate von P, also liegt $P(3|-4)$ auf der Geraden (1 P.). Antwort: $y = -2x + 2$, Nullstelle $x = 1$, P liegt auf g.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Quadratische Ergänzung: Die Hälfte von -4 ist -2, das Quadrat 4.
$f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9$ (1 P.).
b) Aus der Scheitelpunktform $(x-d)^2 + e$ liest man $S(d|e) = S(2|-9)$ ab (1 P.). Der Scheitel ist der tiefste Punkt, weil die Parabel nach oben geöffnet ist.
c) $(x-2)^2 - 9 = 0$ bedeutet $(x-2)^2 = 9$, also $x - 2 = 3$ oder $x - 2 = -3$. Nullstellen: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$ (1 P.). Kontrolle: Sie liegen symmetrisch zur Scheitelstelle 2, denn $\frac{5+(-1)}{2} = 2$.
d) $f(0) = 0 - 0 - 5 = -5$; der Graph schneidet die y-Achse in $(0|-5)$ (1 P.). Antwort: $f(x) = (x-2)^2 - 9$, $S(2|-9)$, Nullstellen -1 und 5, y-Achsenabschnitt -5.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Gemeinsame Punkte haben gleiche Funktionswerte, daher $f(x) = g(x)$: $x^2 - 2x - 3 = 2x - 3$ (1 P.). Auf beiden Seiten $2x - 3$ abziehen ergibt $x^2 - 4x = 0$. Weil das absolute Glied fehlt, klammert man aus: $x(x-4) = 0$. Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x_1 = 0$ oder $x_2 = 4$ (1 P.).
b) Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in die einfachere Funktion g: $g(0) = -3$ und $g(4) = 8 - 3 = 5$ (1 P.). Kontrolle mit f: $f(0) = -3$ und $f(4) = 16 - 8 - 3 = 5$, beide stimmen überein. Die Schnittpunkte sind $S_1(0|-3)$ und $S_2(4|5)$ (1 P.). Bemerkung: Beide Graphen haben denselben y-Achsenabschnitt -3, deshalb ist S_1 zugleich ihr Schnittpunkt mit der y-Achse.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Zinsfaktor bei $3\,\%$: $q = 1{,}03$. Funktion: $K(n) = 2500 \cdot 1{,}03^n$, n in Jahren (1 P.).
b) $K(10) = 2500 \cdot 1{,}03^{10} \approx 2500 \cdot 1{,}3439 \approx 3359{,}79$ € (1 P.).

c) 3000 € entsprechen dem Faktor $\frac{3000}{2500} = 1{,}2$. Wertetabelle:
$K(6) = 2500 \cdot 1{,}194 \approx 2985{,}13$ € liegt noch unter 3000 €, $K(7) \approx 3074{,}68$ € darüber. Nach 7 Jahren sind es erstmals mehr als 3000 € (1 P.).
d) Das Wachstum ist nicht linear, sondern exponentiell. Der jährliche Zuwachs beträgt im ersten Jahr 75 €, im zweiten schon $77{,}25$ €, weil die Zinsen mitverzinst werden. Konstant ist nicht die Differenz, sondern der Faktor $1{,}03$ (1 P.). Antwort:
$K(n) = 2500 \cdot 1{,}03^n$; $3359{,}79$ €; 7 Jahre; exponentiell.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Die beiden Seiten senkrecht zur Mauer sind je x m lang und verbrauchen $2x$ m Zaun. Für die Seite parallel zur Mauer bleiben $36 - 2x$ m. Fläche gleich Länge mal Breite: $A(x) = x(36 - 2x)$ (1 P.).
b) $A(6) = 6 \cdot 24 = 144$, $A(9) = 9 \cdot 18 = 162$, $A(12) = 12 \cdot 12 = 144$, jeweils in m^2 (1 P.). Die Werte für 6 und 12 sind gleich, das Maximum liegt also vermutlich in der Mitte bei 9.
c) $A(x) = -2x^2 + 36x = -2(x^2 - 18x + 81) + 162 = -2(x - 9)^2 + 162$. Scheitel $S(9|162)$: Bei $x = 9$ m ist die Fläche mit $162\,\mathrm{m}^2$ am größten; die Mauerseite ist dann 18 m lang (1 P.).
d) Beide Seitenlängen müssen positiv sein: $x > 0$ und $36 - 2x > 0$, also $0 < x < 18$ (1 P.).