Lernzettel - Prüfungsvorbereitung MSA: Funktionen

Klasse: Klasse 10

Im Mittleren Schulabschluss kommen drei Funktionstypen immer wieder vor: lineare, quadratische und exponentielle Funktionen. Du musst sie erkennen, Gleichungen aufstellen, Graphen skizzieren, Nullstellen und Schnittpunkte berechnen und Sachaufgaben modellieren.

Einstieg: Drei Funktionen, drei Geschichten

Du fährst Taxi: Die Fahrtkosten steigen mit jedem Kilometer um denselben Betrag. Du wirfst einen Ball: Er steigt, erreicht einen höchsten Punkt und fällt zurück. Du legst Geld an: Der Betrag wächst von Jahr zu Jahr stärker. Hinter diesen Alltagssituationen stecken eine lineare, eine quadratische und eine exponentielle Funktion. In der Prüfung zum Mittleren Schulabschluss (MSA) kommt es darauf an, den Typ zu erkennen, die Gleichung aufzustellen und mit ihr zu rechnen. Das Kapitel führt die drei Funktionstypen zusammen und trainiert die typischen Prüfungsaufgaben.

Lineare Funktionen

Definition: lineare Funktion

Die Gleichung $y = mx + b$ hat die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b. Die Nullstelle ist $x = -\frac{b}{m}$.

So gehst du vor: Gerade aus zwei Punkten

1. Berechne $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Setze einen Punkt ein und löse nach b auf.
3. Schreibe die Gleichung auf und mache die Probe mit dem zweiten Punkt.

Beispiel 1: Gerade

Bestimme die Gerade durch $A(1|3)$ und $B(4|9)$.

$m = \frac{6}{3} = 2$. Aus $3 = 2 \cdot 1 + b$ folgt $b = 1$. Die Gerade lautet $y = 2x + 1$.

Quadratische Funktionen

Definition: Parabel

Die **Normalform** $f(x) = ax^2 + bx + c$ beschreibt eine Parabel. Für $a > 0$ ist sie nach oben, für a nach unten geöffnet. $|a| > 1$ macht sie schmaler, $|a|$ breiter. Der y-Achsenabschnitt ist c.

Satz: Scheitelpunktform

$f(x) = a(x-d)^2 + e$ hat den Scheitel $S(d|e)$. Von der Normalform kommst du mit der **quadratischen Ergänzung** dorthin: $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$, also $S(3|-4)$.

Beispiel 2: Nullstellen und Scheitel

$f(x) = x^2 - 2x - 3$. Bestimme Nullstellen, Scheitel und y-Achsenabschnitt.

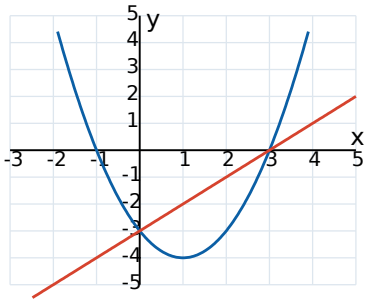
pq-Formel: $x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$, also $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

Der Scheitel liegt in der Mitte bei $x = 1$, und $f(1) = -4$. Also $S(1|-4)$. Der y-Achsenabschnitt ist -3.

Beispiel 3: Parabel aus Scheitel und Punkt

Eine Parabel hat den Scheitel $S(1|2)$ und geht durch $P(3|10)$.

Ansatz $f(x) = a(x-1)^2 + 2$. Einsetzen: $10 = a \cdot 4 + 2$, also $a = 2$. Die Funktion lautet $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$.



Parabel $y = x^2 - 2x - 3$ (blau) und Gerade $y = x - 3$ (rot).

Schnittpunkte

So gehst du vor: Schnittpunkt berechnen

1. Setze die beiden Funktionsterme gleich.
2. Löse die Gleichung nach x.
3. Setze jedes x in eine der Funktionen ein und berechne den y-Wert.
4. Schreibe die Schnittpunkte als Punkte auf.

Beispiel 4: Parabel und Gerade

Schneide $f(x) = x^2 - 2x - 3$ und $g(x) = x - 3$.

$x^2 - 2x - 3 = x - 3$, also $x^2 - 3x = 0$ und $x(x - 3) = 0$. Die Lösungen sind $x = 0$ und $x = 3$.

Die y-Werte aus g: Schnittpunkte $(0|-3)$ und $(3|0)$. Eine Parabel und eine Gerade haben zwei, einen oder keinen Schnittpunkt.

Achtung

Beim Scheitel das Vorzeichen nicht verwechseln: $(x - 3)^2$ hat den Scheitel bei $x = +3$. Beim Schnittpunkt nicht nur x berechnen, sondern auch den y-Wert. Bei a suchst du das Maximum, nicht das Minimum.

Exponentielle Funktionen

Definition: exponentielle Funktion

$f(x) = a \cdot b^x$ beschreibt Wachstum ($b > 1$) oder Zerfall (0). a ist der Anfangswert, b der Faktor. Bei $p\,\%$ Änderung pro Schritt ist $b = 1 \pm \frac{p}{100}$.

Beispiel 5: Bestand

Ein Bestand von 500 wächst um 4 % pro Jahr. Wie groß ist er nach 10 Jahren?

$500 \cdot 1{,}04^{10} \approx 740{,}12$.

Beispiel 6: Faktor aus zwei Werten

Ein Wert beträgt zu Beginn 200 und nach 3 Jahren 270,4. Wie hoch ist das jährliche Wachstum?

$200 \cdot b^3 = 270{,}4$, also $b^3 = 1{,}352$ und $b = \sqrt[3]{1{,}352} \approx 1{,}105$. Das entspricht etwa 11 % Wachstum pro Jahr. Im MSA sind die Zahlen meist so gewählt, dass sich glatte Faktoren ergeben, zum Beispiel $b = 2$ oder $b = 1{,}1$.

Den Funktionstyp erkennen und modellieren

Merke: Typ erkennen

- **Linear:** gleiche Schritte, gleiche Differenz (Tabelle 3; 5; 7; 9).
- **Quadratisch:** die zweiten Differenzen sind konstant (0; 1; 4; 9 mit den Differenzen 1; 3; 5).
- **Exponentiell:** gleicher Faktor (2; 4; 8; 16).

Beispiel 7: Ballwurf

Die Höhe eines Balls ist $h(t) = -5t^2 + 20t$ (in m, t in s). Wann landet er, und wie hoch fliegt er?

Er landet, wenn $h = 0$: $-5t(t-4) = 0$, also nach **4 Sekunden**.

Die größte Höhe liegt im Scheitel bei $t = 2$: $h(2) = -20 + 40 = 20$ m.

So gehst du vor: Vorgehen in der Prüfung

1. Lies, was gegeben ist: Punkte, Nullstellen, Scheitel oder eine Tabelle.
2. Wähle den passenden Ansatz: Zwei Punkte (Gleichungssystem oder Steigung), Nullstellen (Linearfaktorform $a(x-x_1)(x-x_2)$), Scheitel (Scheitelpunktform).
3. Skizziere ein Koordinatensystem mit den wichtigsten Punkten.
4. Schreibe zum Schluss einen Antwortsatz mit Einheit.

Hinweis

Linear heißt konstante Steigung, quadratisch heißt Parabel mit Scheitel, exponentiell heißt konstanter Wachstumsfaktor. Für Nullstellen setzt du $f(x) = 0$, für Schnittpunkte setzt du Funktionsterme gleich.

Beispiel 8: Typ erkennen

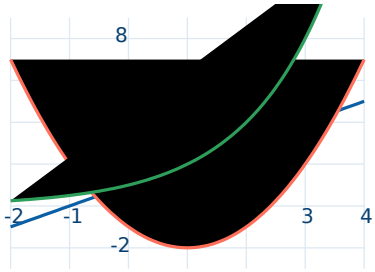
Die Tabelle zeigt $x = 0, 1, 2, 3$ mit $y = 1, 3, 9, 27$. Welcher Typ liegt vor, und wie lautet die Funktion?

Die Differenzen (2; 6; 18) sind nicht konstant, die Quotienten (3; 3; 3) schon. Es ist exponentielles Wachstum mit $a = 1$ und $b = 3$: $f(x) = 3^x$.

Die drei Funktionstypen im Vergleich

Die folgende Übersicht hilft dir, in Tabellen und Texten den richtigen Typ zu erkennen. Bei der linearen Funktion sind die Differenzen aufeinanderfolgender Funktionswerte konstant, bei der quadratischen sind die zweiten Differenzen konstant, bei der exponentiellen sind die Quotienten konstant. Auch der Text verrät viel: „pro Minute 8 Cent“ oder „jeden Monat 20 € mehr“ deuten auf linear, „fliegt in einem Bogen“ oder „Fläche eines Rechtecks“ auf quadratisch, „wächst jedes Jahr um 4 %“ oder „halbiert sich alle 5 Tage“ auf exponentiell.

Typ	Gleichung	Tabelle	Graph
linear	$y = mx + b$	gleiche Differenzen	Gerade
quadratisch	$y = a(x-d)^2 + e$	gleiche zweite Differenzen	Parabel mit Scheitel $S(d\|e)$
exponentiell	$y = a \cdot b^x$	gleiche Quotienten	steigt oder fällt immer steiler bzw. flacher, Asymptote $y = 0$



Beispiel 9: Quadratische Ergänzung

Bringe $f(x) = x^2 - 6x + 5$ auf die Scheitelpunktform und gib den Scheitel und die Nullstellen an.

Die quadratische Ergänzung nimmt die Hälfte des Koeffizienten von x, hier -3, und quadriert sie: $x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$. Der Scheitelpunkt ist $S(3|-4)$. Die Nullstellen folgen aus $(x-3)^2 = 4$, also $x - 3 = \pm 2$ und damit $x = 1$ oder $x = 5$. Die Parabel ist nach oben geöffnet, weil der Faktor vor der Klammer $+1$ ist.

Beispiel 10: Handytarife vergleichen

Tarif A kostet 5 € Grundgebühr plus 8 Cent je Minute, Tarif B kostet 10 € Grundgebühr plus 3 Cent je Minute. Ab wie vielen Minuten ist B günstiger?

Die Kostenfunktionen sind $A(x) = 5 + 0{,}08x$ und $B(x) = 10 + 0{,}03x$ mit x in Minuten. Gleichsetzen ergibt $5 + 0{,}08x = 10 + 0{,}03x$, also $0{,}05x = 5$ und $x = 100$. Bei 100 Minuten kosten beide 13 €. Wer mehr als 100 Minuten telefoniert, fährt mit B günstiger, denn die Gerade B hat die kleinere Steigung. Der Schnittpunkt der Geraden ist $(100|13)$.

Beispiel 11: Der Ballwurf

Die Höhe eines geworfenen Balls beträgt $h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$ (t in Sekunden, h in Metern). Wann ist der Ball am höchsten, und wann trifft er den Boden?

Der Scheitel liegt bei $t = -\frac{20}{2 \cdot (-5)} = 2$ mit $h(2) = -20 + 40 + 1{,}5 = 21{,}5$ m. Der Ball ist nach 2 Sekunden am höchsten. Den Boden erreicht er bei $h(t) = 0$: $-5t^2 + 20t + 1{,}5 = 0$, also $t^2 - 4t - 0{,}3 = 0$. Die pq-Formel liefert $t = 2 \pm \sqrt{4{,}3} \approx 2 \pm 2{,}07$. Die negative Lösung ist sinnlos, also trifft der Ball nach etwa 4,07 Sekunden auf.

Achtung: Typische Prüfungsfehler

Erstens: In $f(x) = a(x-d)^2 + e$ hat d das umgekehrte Vorzeichen: $f(x) = (x+2)^2 - 3$ hat den Scheitel $S(-2|-3)$. Zweitens: Bei exponentiellem Wachstum multiplizierst du, du addierst nicht: 5 % Zunahme bedeuten den Faktor $1{,}05$ und nicht $+0{,}05$.

Drittens: Bei Schnittpunkten brauchst du beide Koordinaten, also nach dem Lösen der Gleichung noch das Einsetzen in eine der Funktionen. Viertens: Beim Lösen von quadratischen Gleichungen im Sachzusammenhang gehört eine Lösung oft nicht zur Aufgabe, zum Beispiel eine negative Zeit.

So bearbeitest du Prüfungsaufgaben

Prüfungsaufgaben sind mit Operatoren formuliert, die genau sagen, was du tun sollst. „Berechne“ verlangt eine Rechnung mit Zwischenschritten, „Bestimme“ ein Ergebnis mit nachvollziehbarem Weg, „Begründe“ eine Erklärung mit Argumenten, „Zeige“ den Nachweis einer vorgegebenen Behauptung und „Skizziere“ eine Zeichnung mit den wichtigen Punkten. Lies den Text zweimal, markiere die Zahlen und die gesuchte Größe und überlege, welcher Funktionstyp vorliegt, bevor du rechnest. Schreibe zum Schluss einen Antwortsatz mit Einheit.

So gehst du vor: Funktionen in der Prüfung

1. Typ erkennen: Differenzen, zweite Differenzen oder Quotienten bilden, oder die Wörter im Text deuten.
2. Gleichung aufstellen: Gerade aus zwei Punkten, Parabel aus Scheitel und Punkt, Exponentialfunktion aus Anfangswert und Faktor.
3. Fragen beantworten: Funktionswerte durch Einsetzen, Nullstellen und Schnittpunkte durch Gleichungen.
4. Ergebnis prüfen: Probe durch Einsetzen und Plausibilität mit einer Skizze.
5. Antwortsatz mit Einheit schreiben.

Wusstest du? Der Mittlere Schulabschluss

Der Mittlere Schulabschluss (MSA) wird am Ende der Klasse 10 geprüft. Dabei werden Rechenfertigkeiten, Funktionen, Geometrie und Stochastik abgefragt, und häufig gibt es einen Teil ohne Hilfsmittel. Wer die grundlegenden Rechenwege sicher beherrscht, braucht weniger Zeit und macht weniger Flüchtigkeitsfehler. Übe deshalb auch das Überschlagen: Wenn ein Ergebnis weit von der Skizze oder vom Alltag abweicht, hat sich meist ein Fehler eingeschlichen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Lineare Funktion $y = mx + b$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ist die Steigung, b der y-Achsenabschnitt; Nullstelle $x = -\frac{b}{m}$.
- Quadratische Funktion in Scheitelpunktform $y = a(x - d)^2 + e$: Scheitel $S(d|e)$; $a > 0$ nach oben, a nach unten geöffnet; Faktor $|a|$ bestimmt die Weite.
- Allgemeine Form in Scheitelpunktform bringst du mit quadratischer Ergänzung; Nullstellen mit pq-Formel oder aus der Scheitelpunktform.
- Schnittpunkte zweier Graphen: Funktionsterme gleichsetzen, lösen und die y-Koordinate durch Einsetzen bestimmen; 0, 1 oder 2 Lösungen bei Gerade und

Parabel.
- Exponentielle Funktion $y = a \cdot b^x$: a Anfangswert, b Wachstumsfaktor ($b > 1$ Wachstum, 0 Abnahme).
- Typ erkennen: konstante Differenzen (linear), konstante zweite Differenzen (quadratisch), konstante Quotienten (exponentiell).
- Bei Sachaufgaben gehört der Definitionsbereich zur Lösung; unsinnige Lösungen (negative Zeit) werden verworfen.
- Prüfungstipp: Operatoren genau lesen, Skizze anfertigen, Probe machen, Antwortsatz mit Einheit schreiben.

Achtung

Bei jeder Textaufgabe gehört ein Antwortsatz mit Einheit dazu. Arbeite ohne Skizze nie: Sie zeigt dir, ob ein Ergebnis wie ein Scheitel unterhalb der x-Achse zur Öffnung der Parabel passt.

Ottos Tipp

Frage dich bei jeder Funktionsaufgabe: Welcher Typ ist das? Tabelle oder Text liefern dir die Antwort. Danach wählst du das passende Werkzeug: Steigungsdreieck, pq-Formel oder Wachstumsfaktor. Und zeichne eine Skizze, das hilft beim Kontrollieren.