Lösungen - Prüfungsvorbereitung MSA: Funktionen

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) a) $m = \frac{7-3}{3-1} = 2$; $3 = 2 \cdot 1 + b$, $b = 1$: $y = 2x + 1$. b) $m = \frac{6+2}{4-0} = 2$; $b = -2$: $y = 2x - 2$. Die Steigung ist Höhenunterschied durch Längenunterschied der beiden Punkte; den Achsenabschnitt b erhält man durch Einsetzen eines Punktes. Bei Punkt $C(0|-2)$ kann man b direkt ablesen.
b) $m = \frac{-1-5}{2+1} = -2$; $5 = -2 \cdot (-1) + b$, $b = 3$: $y = -2x + 3$. Für Teil c): Die Steigung ist negativ, die Gerade fällt also. Probe mit F: $-2 \cdot 2 + 3 = -1$.
c) $m = \frac{4-4}{5-2} = 0$: waagerechte Gerade $y = 4$. Für Teil d): Beide Punkte haben dieselbe y-Koordinate, deshalb ist die Steigung null und die Gerade verläuft parallel zur x-Achse.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $0{,}5x - 2 = 0$, $x = 4$. $f(0) = -2$. Für die Nullstelle setzt man $f(x) = 0$; der y-Achsenabschnitt ist der Wert bei $x = 0$, also die Zahl b.
b) $f(6) = 3 - 2 = 1$: P liegt auf dem Graphen. $f(-2) = -1 - 2 = -3 \neq -2$: Q liegt nicht darauf. Man setzt die x-Koordinate ein und vergleicht das Ergebnis mit der y-Koordinate.
c) $m = 0{,}5$; bei 6 Einheiten nach rechts steigt sie um 3 Einheiten. Die Steigung gibt an, um wie viel y zunimmt, wenn x um 1 wächst; bei 6 Schritten also um $6 \cdot 0{,}5$.
d) Gleiche Steigung $0{,}5$, also $y = 0{,}5x + 3$. Parallele Geraden haben die gleiche Steigung; der Achsenabschnitt ist der angegebene neue Wert.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$: $x = 1 \pm 2$, also $x = -1$ oder $x = 3$. Mit der pq-Formel ($p = -2$, $q = -3$). Probe: $9 - 6 - 3 = 0$.
b) $x_S = 1$, $f(1) = -4$: $S(1|-4)$. Der Scheitel liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen, also bei $x = 1$.
c) $f(0) = -3$. Für $x = 0$ bleibt nur das absolute Glied.
d) Der Faktor vor x^2 ist $+1 > 0$. Ein positiver Faktor vor x^2 bedeutet eine nach oben geöffnete Parabel mit einem tiefsten Punkt.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $(x-3)^2 - 4$; $S(3|-4)$. Halber Faktor vor x ist -3, sein Quadrat 9; man ergänzt $+9-9$.
b) $(x+2)^2 - 3$; $S(-2|-3)$. Halber Faktor ist 2, sein Quadrat 4.
c) $-(x^2 - 2x) + 3 = -(x-1)^2 + 1 + 3 = -(x-1)^2 + 4$; $S(1|4)$, nach unten geöffnet. Zuerst wird -1 ausgeklammert; das Minuszeichen bedeutet eine nach unten geöffnete

Parabel mit dem Maximum 4.
d) $2(x^2-4x)=2(x-2)^2-8$; $S(2|-8)$. Zuerst den Faktor 2 ausklammern, dann innerhalb der Klammer ergänzen; beim Ausmultiplizieren wird -4 mit 2 multipliziert.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $a\cdot 4-3=1$, $a=1$: $f(x)=(x-2)^2-3$. Man setzt den Scheitel in die Scheitelform ein und bestimmt a mit dem Punkt P: $(4-2)^2=4$.
b) $a\cdot 4+4=-4$, $a=-2$: $f(x)=-2(x+1)^2+4$. Das negative a zeigt, dass die Parabel nach unten geöffnet ist.
c) $a\cdot 9+5=-4$, $a=-1$: $f(x)=-x^2+5$. Der Scheitel liegt auf der y-Achse, deshalb fehlt die Verschiebung nach links oder rechts.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$, $x=2$ oder $x=-1$. Punkte $(2|4)$ und $(-1|1)$. Man setzt die Terme gleich, bringt alles auf eine Seite und löst; die y-Koordinaten erhält man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionen.
b) $x^2-2x-3=2x-3$, $x^2-4x=0$, $x=0$ oder $x=4$. Punkte $(0|-3)$ und $(4|5)$. Hier fällt die Zahl weg; man klammert x aus.
c) $x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$, $x=3$. Ein Berührpunkt $(3|0)$: die Gerade ist Tangente. Eine doppelte Lösung bedeutet, dass die Gerade die Parabel nur berührt.
d) $x^2-2x+4=0$: Die Diskriminante $4-16$, also keine Schnittpunkte. Eine negative Diskriminante bedeutet: Die Gerade verläuft unterhalb der Parabel.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $f(x)=400\cdot 1{,}05^x$; $f(3)\approx 463{,}05$; $f(10)\approx 651{,}56$. Anfangswert 400, Wachstumsfaktor 1,05; man setzt $x=3$ und $x=10$ ein.
b) $a=200$; $b^2=\frac{450}{200}=2{,}25$, $b=1{,}5$. Der Anfangswert a ist der Wert bei $x=0$; aus zwei Punkten im Abstand 2 erhält man b^2 als Quotient.
c) $f(4)=200\cdot 1{,}5^4=1012{,}5$. Man setzt $x=4$ in die gefundene Funktion ein.
d) Wachsend, denn $b=1{,}5>1$. Bei $b>1$ wächst die Funktion, bei 0 fällt sie.

Lösung zu Aufgabe 8

a) A: Differenzen $3;5;7;9$, zweite Differenzen 2: quadratisch. D: Differenzen $1;3;5;7$, zweite Differenzen 2: quadratisch. Sind die ersten Differenzen nicht gleich, aber die zweiten Differenzen, so ist die Reihe quadratisch.
b) B: Quotienten $2;2;2;2$: exponentiell. C: Differenzen -2: linear. Gleiche Quotienten bedeuten exponentiell, gleiche Differenzen linear.
c) A: $y=(x+1)^2$. B: $y=3\cdot 2^x$. C: $y=-2x+10$. D: $y=x^2+2$. Die Gleichungen ergeben sich aus Startwert und Differenz bzw. Faktor; man prüft sie an einem Tabellenwert.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $A(x) = 5 + 0{,}08x$, $B(x) = 10 + 0{,}03x$, $F(x) = 18$. Kosten gleich Grundgebühr plus Minutenpreis mal Minuten.
b) A: 5; 13; 21; 29. B: 10; 13; 16; 19. Flat: 18; 18; 18; 18 (in €). Man setzt die Minutenzahlen in die drei Funktionen ein.
c) $5 + 0{,}08x = 10 + 0{,}03x$, $x = 100$ min; dort kosten beide 13 €. Man setzt die Kosten von A und B gleich und löst nach x.
d) B und Flat: $10 + 0{,}03x = 18$, $x = \frac{8}{0{,}03} \approx 266{,}7$ min. A ist günstig bis 100 min, B zwischen 100 und 267 min, die Flat ab 267 min. Antwort: Wer weniger als 100 Minuten telefoniert, wählt A; bis etwa 267 Minuten B; darüber lohnt sich die Flat.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $h(1) = -5 + 20 + 1{,}5 = 16{,}5$ m; $h(3) = -45 + 60 + 1{,}5 = 16{,}5$ m. Man setzt die Zeiten ein; die gleichen Werte zeigen die Symmetrie zum Scheitel bei $t = 2$.
b) Scheitel bei $t = 2$: $h(2) = 21{,}5$ m. Der Scheitel liegt in der Mitte zwischen $t = 1$ und $t = 3$. Antwort: Nach 2 s ist der Ball 21,5 m hoch.
c) $t = 2 + \sqrt{4{,}3} \approx 4{,}07$ s (die negative Lösung entfällt). Man setzt $h = 0$, teilt durch -5 und löst mit der pq-Formel. Antwort: Der Ball landet nach etwa 4,1 s.
d) $-5t^2 + 20t + 1{,}5 = 16{,}5$ ergibt $t^2 - 4t + 3 = 0$, also $t = 1$ s oder $t = 3$ s. Diese Zeiten stimmen mit Teil a) überein.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Höhe 6 m. Nullstellen: $x^2 = 40$, $x = \pm\sqrt{40} \approx \pm 6{,}32$; Breite $\approx 12{,}65$ m. Die Höhe ist der Scheitelwert $h(0)$; die Breite ist der Abstand der Nullstellen.
b) $h(4) = -0{,}15 \cdot 16 + 6 = 3{,}6$ m. Man setzt $x = 4$ ein.
c) Am Rand ($x = 2{,}5$): $h = -0{,}9375 + 6 = 5{,}06$ m $> 3{,}2$ m. Er passt. Der Lastwagen fährt mittig; an seinem Rand muss der Bogen höher sein als der Wagen.
d) $h(3) = -1{,}35 + 6 = 4{,}65$ m. Man setzt $x = 3$ ein.

Lösung zu Aufgabe 12

a) 720; 576; $460{,}8$ €. Jedes Jahr wird mit 0,8 multipliziert.
b) $W(t) = 900 \cdot 0{,}8^t$. Anfangswert 900 €, Faktor 0,8.
c) $900 \cdot 0{,}8^4 \approx 369 > 300$, $900 \cdot 0{,}8^5 \approx 295$. Also nach 5 Jahren. Man probiert ganze Jahre, bis der Wert unter 300 € fällt.
d) Erstes Jahr: $900 - 720 = 180$ €. Drittes Jahr: $576 - 460{,}80 = 115{,}2$ €. Der absolute Verlust sinkt. Der prozentuale Verlust bleibt gleich, der absolute Verlust wird kleiner, weil der Wert sinkt.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $4000 \cdot 1{,}025^8 \approx 4873{,}61$ €. Zinseszins: achtmal mit 1,025 multiplizieren.
b) $4000 + 8 \cdot 100 = 4800$ €. Ohne Zinseszins kommen jedes Jahr 100 € dazu.

c) Beide Funktionen starten bei 4000 €. Bei gleichem Zinssatz (2,5 % von 4000 € sind 100 €) erhalten beide im ersten Jahr 100 €, danach liegt Frau Berger vorn: Nach 2 Jahren $4202{,}50$ € gegen 4200 €. Gleich sind sie nur zu Beginn und nach 1 Jahr. Der Zinseszins bringt ab dem zweiten Jahr einen kleinen Vorsprung, der jedes Jahr wächst.
d) Bei Zinseszins werden auch die Zinsen verzinst, der Zuwachs wächst von Jahr zu Jahr. Beim linearen Angebot bleibt er konstant. Das ist der Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Die Seite an der Wand ist $40 - 2x$ lang, die Breite ist x. Also $A = x(40 - 2x)$. Die beiden Seiten senkrecht zur Wand verbrauchen $2x$ m Zaun, der Rest geht an die Seite parallel zur Wand.
b) $A(5) = 5 \cdot 30 = 150$; $A(10) = 10 \cdot 20 = 200$; $A(15) = 15 \cdot 10 = 150$ (m²). Man setzt die Werte in $A(x)$ ein.
c) $A(x) = -2x^2 + 40x = -2(x - 10)^2 + 200$: Scheitel $S(10|200)$. Maximal 200 m² bei $x = 10$ m. Man ergänzt quadratisch; der Scheitel liefert die größte Fläche.
d) 0, damit beide Längen positiv sind. Für $x \geq 20$ bliebe für die Wandseite kein Zaun übrig.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $E(p) = p(200 - 40p) = -40p^2 + 200p$; $G(p) = -40p^2 + 200p - 30$. Einnahmen gleich Preis mal Besucherzahl; der Gewinn ist Einnahmen minus feste Kosten.
b) Scheitel bei $p = 2{,}5$: $E = -40 \cdot 6{,}25 + 500 = 250$ €, Gewinn 220 €; es kommen 100 Besucher. Der Scheitel der nach unten geöffneten Parabel liegt bei $p = \frac{200}{80}$.
c) $-40p^2 + 200p - 30 = 0$, $p^2 - 5p + 0{,}75 = 0$, $p = 2{,}5 \pm \sqrt{5{,}5} \approx 0{,}15$ oder $4{,}85$ €. Die Gewinnschwelle sind die Nullstellen der Gewinnfunktion.
d) Mit 2,50 € ist der Gewinn am größten und es kommen 100 Besucher. Bei 2 € wären es 120 Besucher bei 210 € Gewinn: ein guter Kompromiss. Man vergleicht Gewinn und Besucherzahl für verschiedene Preise.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $A(t) = 50\,000 + 2000t$, $B(t) = 40\,000 \cdot 1{,}04^t$. Stadt A wächst linear, Stadt B exponentiell mit dem Faktor 1,04.
b) A: $70\,000$; $90\,000$; $94\,000$. B: $40\,000 \cdot 1{,}04^{10} \approx 59\,210$; $40\,000 \cdot 1{,}04^{20} \approx 87\,645$; $40\,000 \cdot 1{,}04^{22} \approx 94\,797$. Man setzt die Jahre in beide Terme ein.
c) Jahr 21: $B \approx 91\,151$. Jahr 22: $B \approx 94\,797 > 94\,000$. Nach 22 Jahren. Man vergleicht beide Städte Jahr für Jahr in der Nähe von 20.
d) Exponentielles Wachstum steigt irgendwann stärker als jedes lineare Wachstum, weil der Zuwachs selbst mitwächst. Deshalb überholt Stadt B die Stadt A trotz kleinerem Anfangswert.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Quotienten: $\frac{64}{80} = \frac{51{,}2}{64} = \frac{40{,}96}{51{,}2} = 0{,}8$: konstant. Gleiche Quotienten in gleichen Zeitabständen zeigen exponentielle Abnahme.
b) $h(t) = 80 \cdot 0{,}8^{t/10}$. Weil der Faktor für 10 Minuten gilt, steht $\frac{t}{10}$ im Exponenten.
c) $h(50) = 80 \cdot 0{,}8^5 \approx 26{,}2$ cm. Man setzt $t = 50$ ein, das sind 5 Zeitabschnitte.
d) $0{,}8^k$: $k > 9{,}32$, also $k = 10$ Zeitabschnitte, das sind nach 100 Minuten. Man probiert ganze Zeitabschnitte, bis weniger als ein Achtel (10 cm) übrig ist.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Scheitel: $f(x) = -0{,}25(x-4)^2 + 4{,}5$: $S(4|4{,}5)$. Man klammert $-0{,}25$ aus und ergänzt quadratisch.
b) $-0{,}25x^2 + 1{,}5x + 0{,}5 = 0$, $x^2 - 6x - 2 = 0$, $x = 3 + \sqrt{11} \approx 6{,}32$; $y = 0{,}5x \approx 3{,}16$. Schnittpunkt $\approx (6{,}32|3{,}16)$. Man setzt Parabel und Gerade gleich und löst; nur die positive Lösung liegt im Spielpark.
c) Etwa 6,32 m. Der Strahl trifft die Rutsche etwa 6,32 m vom Startpunkt entfernt (waagerecht gemessen).
d) $f(3) = -2{,}25 + 6 + 0{,}5 = 4{,}25$ m $> 1{,}5$ m: Das Kind steht unter dem Strahl. Man setzt die Position des Kindes ein und vergleicht mit seiner Größe.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $10x$: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80. x^2: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64. 2^x: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Man setzt die x-Werte in alle drei Terme ein.
b) Bei $x = 2$ (beide 4) und $x = 4$ (beide 16). Dazwischen ist $x^2 > 2^x$, danach ist 2^x größer. Man vergleicht die Zeilen der Tabelle.
c) Bei $x = 6$: $64 > 60$. Für $x = 5$ gilt noch 32. Man sucht den ersten x-Wert, bei dem 2^x größer ist als $10x$.
d) Die Exponentialfunktion 2^x: Sie wächst schneller als jede Potenz und jedes lineare Wachstum. Auf lange Sicht übertrifft die Exponentialfunktion alle anderen.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $f_a(x) = (x-a)^2 - 1$; Scheitel $S(a|-1)$. Man erkennt die binomische Formel $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$.
b) $(x-a)^2 = 1$, $x = a \pm 1$. Man setzt $f_a(x) = 0$ und zieht die Wurzel.
c) Alle Scheitel haben die y-Koordinate -1: Sie liegen auf der Geraden $y = -1$. Der Parameter a verschiebt die Parabel nur nach links oder rechts.
d) $f_a(0) = a^2 - 1 = 3$, $a^2 = 4$, $a = 2$ oder $a = -2$. Man setzt $x = 0$ ein und löst nach a auf.