Lösungen zur Klassenarbeit - Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Für $f(x) = x^4$ gilt $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$: Achsensymmetrie zur y-Achse, typisch für gerade Exponenten. Für $g(x) = x^5$ gilt $g(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -g(x)$: Punktsymmetrie zum Ursprung, typisch für ungerade Exponenten (1 P.).
b) $f(-2) = (-2)^4 = 16$, weil vier negative Faktoren ein positives Produkt ergeben; $g(-2) = (-2)^5 = -32$, weil fünf negative Faktoren ein negatives Produkt ergeben (1 P.). Die Symmetrie bestätigt das: $f(2) = 16$, $g(2) = 32$.
c) f: Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$, beide Enden zeigen nach oben, ähnlich einer Parabel, aber nahe 0 flacher (1 P.). g: Für $x \to -\infty$ geht $g(x) \to -\infty$, für $x \to +\infty$ geht $g(x) \to +\infty$; der Graph verläuft von links unten nach rechts oben (1 P.).

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Bei ungeradem Exponenten gibt es genau eine Lösung, auch für negative Zahlen: $x = \sqrt[3]{-64} = -4$, denn $(-4)^3 = -64$ (1 P.).
b) Bei geradem Exponenten und positiver rechter Seite gibt es zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$, denn $3^4 = (-3)^4 = 81$ (1 P.).
c) $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Aus $\frac{2}{x^2} = 0{,}5$ folgt nach Multiplikation mit x^2 und Division durch $0{,}5$: $x^2 = 4$, also $x = \pm 2$ (1 P.). Dabei muss $x \neq 0$ sein. Probe: $\frac{2}{4} = 0{,}5$.
d) Eine gerade Potenz einer reellen Zahl ist nie negativ, $x^4 \geq 0$. Daher hat $x^4 = -5$ keine Lösung, $L = \{\}$ (1 P.). Geometrisch: Der Graph von x^4 liegt nie unterhalb der x-Achse und trifft die Gerade $y = -5$ nicht.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Unter der Wurzel darf keine negative Zahl stehen: $x - 1 \geq 0$, also $D = \{x \mid x \geq 1\}$. Die Wurzel selbst ist mindestens 0, dazu kommt $+2$; der Wertebereich ist $W = \{y \mid y \geq 2\}$ (1 P.).
b) Für alle x aus D gilt $\sqrt{x-1} \geq 0$ und damit $f(x) \geq 2 > 0$. Der Graph erreicht die x-Achse nie, es gibt keine Nullstelle (1 P.).
c) $f(5) = \sqrt{5-1} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4$ (1 P.).
d) Das -1 unter der Wurzel verschiebt den Graphen von $\sqrt{x}$ um 1 nach rechts; das $+2$ verschiebt ihn um 2 nach oben (1 P.). Der Startpunkt wandert von $(0|0)$ nach $(1|2)$. Häufiger Fehler: Das Minuszeichen in der Klammer als Verschiebung nach links deuten.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Beide Seiten werden quadriert: $3x + 4 = x^2$. Umstellen: $x^2 - 3x - 4 = 0$. pq-Formel:

$x = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4} = 1{,}5 \pm 2{,}5$, also $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$ (2 P.). Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung; es können Scheinlösungen entstehen.
b) Probe in der Ausgangsgleichung: Für $x = 4$ ist links $\sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$ und rechts 4, wahr. Für $x = -1$ ist links $\sqrt{-3 + 4} = \sqrt{1} = 1$, rechts aber -1; da $1 \neq -1$, ist die Aussage falsch (1 P.).
c) Nur $x = 4$ besteht die Probe: $L = \{4\}$ (1 P.). Die Scheinlösung -1 gehört zur Gleichung $-\sqrt{3x + 4} = x$, die beim Quadrieren dieselbe quadratische Gleichung ergibt. Deshalb ist die Probe bei Wurzelgleichungen Pflicht.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{9{,}81}} = \sqrt{16{,}31} \approx 4{,}04$ s (1 P.).
b) Die Formel wird nach dem Weg umgestellt: Quadrieren liefert $t^2 = \frac{2s}{g}$, also $s = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3^2 \approx 44{,}1$ m (1 P.).
c) Bei vierfacher Höhe steht unter der Wurzel das Vierfache: $t' = \sqrt{\frac{2 \cdot 4h}{g}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2t$. Die Fallzeit verdoppelt sich nur (1 P.). Das zeigt den typischen Verlauf einer Wurzelfunktion: Sie wächst immer langsamer.
d) $h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 2^2 = 19{,}62 \approx 19{,}6$ m (1 P.). Kontrolle mit c): 80 m ist etwa das Vierfache von $19{,}6$ m, und $4{,}04$ s ist etwa das Doppelte von 2 s. Antwort: $4{,}04$ s; $44{,}1$ m; Faktor 2; $19{,}6$ m.