Lernzettel - Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen

Klasse: Klasse 10

Quadrat, Würfel, Hyperbel, Wurzel: Viele wichtige Graphen gehören zur Familie der Potenz- und Wurzelfunktionen. Wenn du die Grundformen kennst, erkennst du jede Funktion dieser Art sofort.

Einstieg: Vom Würfel zur Kante

Ein Würfel mit der Kante a hat das Volumen $V = a^3$. Verdoppelst du die Kante, wächst das Volumen nicht auf das Doppelte, sondern auf das Achtfache. Das ist ein typisches Verhalten von Potenzfunktionen. Kennst du umgekehrt das Volumen, so ermittelst du die Kante mit der dritten Wurzel. Auch ein Stein, der aus einem Meter Höhe fällt, folgt einer Potenzfunktion: Seine Fallstrecke wächst mit dem Quadrat der Zeit. Die Fallzeit zu einer Höhe ist dagegen eine Wurzelfunktion. In diesem Kapitel lernst du, Potenz- und Wurzelfunktionen zu zeichnen, ihre Eigenschaften zu beschreiben und Gleichungen mit ihnen zu lösen.

Potenzfunktionen

Definition: Potenzfunktion

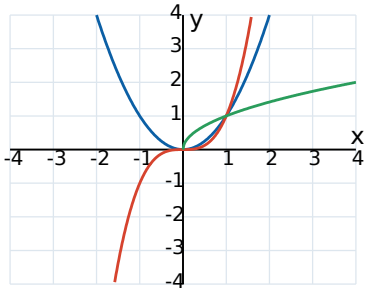
Eine **Potenzfunktion** hat die Form $f(x) = a \cdot x^n$ mit $a \neq 0$ und einem Exponenten n. In Klasse 10 betrachtest du natürliche Exponenten ($n = 1, 2, 3, \ldots$) und negative ganze Exponenten ($n = -1, -2, \ldots$). Der Exponent bestimmt die Grundform, der Faktor a streckt, staucht oder spiegelt den Graphen.

Satz: Gerade Exponenten

Bei x^2, x^4, x^6 ist $(-x)^n = x^n$. Der Graph ist **achsensymmetrisch zur y-Achse** und verläuft für $a > 0$ oberhalb der x-Achse. Alle gehen durch $(0|0)$, $(1|1)$ und $(-1|1)$. Je größer n, desto flacher ist der Graph zwischen -1 und 1 und desto steiler außerhalb.

Satz: Ungerade Exponenten

Bei x^1, x^3, x^5 ist $(-x)^n = -x^n$. Der Graph ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**. Für $a > 0$ kommt er von links unten und geht nach rechts oben. Die Wertemenge ist ganz $\mathbb{R}$.



Blau-rot-grün: $y = x^2$ (blau, Parabel), $y = x^3$ (rot) und $y = \sqrt{x}$ (grün).

Merke: Einfluss des Faktors a

Für $|a| > 1$ wird der Graph in y-Richtung gestreckt, für 0 gestaucht. Ist a, wird er zusätzlich an der x-Achse gespiegelt. So öffnet sich $f(x) = -0{,}5x^2$ nach unten und ist flacher als die Normalparabel.

Beispiel 1: Gleichung $x^n = c$

Löse $x^2 = 49$ und $x^3 = -27$.

$x^2 = 49$ hat die Lösungen $x = 7$ und $x = -7$.

$x^3 = -27$ hat genau eine Lösung $x = -3$.

Bei geradem Exponenten gibt es für $c > 0$ zwei Lösungen, bei ungeradem immer genau eine.

Beispiel 2: Parameter bestimmen

Der Graph von $f(x) = a \cdot x^3$ geht durch $P(2|24)$. Bestimme a.

Einsetzen: $24 = a \cdot 8$, also $a = 3$. Die Funktion lautet $f(x) = 3x^3$. Probe: $f(-1) = -3$, das passt zur Punktsymmetrie.

Negative Exponenten

Definition: Hyperbel

Es gilt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Der Graph von $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ heißt **Hyperbel** und besteht aus zwei Ästen. Er ist punktsymmetrisch zum Ursprung, die Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Achsen werden nie berührt: Man nennt sie **Asymptoten**.

Merke: Hyperbel mit geradem Exponenten

$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ist achsensymmetrisch, alle Funktionswerte sind positiv. Wächst x über alle Grenzen, werden die Werte beliebig klein, bleiben aber positiv.

Wurzelfunktionen

Definition: Wurzelfunktion

Die **Wurzelfunktion** $f(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrung der Quadratfunktion für $x \geq 0$: $\sqrt{x} = y$ genau dann, wenn $y^2 = x$ und $y \geq 0$. Definitions- und Wertemenge sind $[0; \infty[$. Der Graph beginnt im Ursprung und steigt immer langsamer. Er ist die an $y = x$ gespiegelte rechte Hälfte der Normalparabel.

Merke: Reihenfolge zwischen 0 und 1

Für 0 gilt x^2. Für $x = 0{,}25$ ist $x^2 = 0{,}0625$ und $\sqrt{x} = 0{,}5$.

Satz: Verschieben

Der Graph von $g(x) = f(x - d) + e$ entsteht aus dem von f durch Verschieben um d nach rechts und e nach oben. Bei $g(x) = \sqrt{x + 1} - 2$ liegt der Startpunkt bei $(-1|-2)$, und die Definitionsmenge ist $x \geq -1$.

Beispiel 3: Wurzelgleichung

Löse $\sqrt{x - 1} + 2 = 6$.

Zuerst $\sqrt{x - 1} = 4$, dann quadrieren: $x - 1 = 16$, also $x = 17$. Probe: $\sqrt{16} + 2 = 6$. Passt, und $x \geq 1$ ist erfüllt.

So gehst du vor: Graph zeichnen

1. Erstelle eine Wertetabelle mit mindestens fünf Werten (bei Wurzeln mit 0, 1, 4 und 9).
2. Trage die Punkte in ein Koordinatensystem ein.
3. Verbinde sie mit einer glatten Kurve, nicht mit dem Lineal.
4. Nutze die Symmetrie: Die rechte Seite einer Parabel spiegelst du nach links. Bei der Hyperbel zeichnest du beide Äste getrennt.

Beispiel 4: Eigenschaften im Überblick

Vergleiche x^2, x^3, $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$.

x^2: Scheitel $(0|0)$, fallend für x, steigend für $x > 0$.

x^3: überall steigend, keine Extremstelle. $\sqrt{x}$: überall steigend, aber immer langsamer.

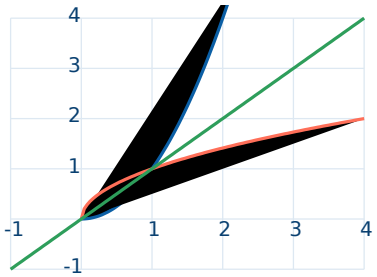
$\frac{1}{x}$: keine Nullstelle, fallend auf beiden Ästen, nicht definiert bei $x = 0$.

Hinweis

Potenzfunktionen beschreiben Flächen und Volumina: Beim Quadrat gilt $A = a^2$, beim Würfel $V = a^3$. Verdoppelt man die Seitenlänge, wird die Fläche viermal und das Volumen achtmal so groß. Der freie Fall folgt näherungsweise $s = 5t^2$. Wurzelfunktionen brauchst du, um aus der Fläche die Seitenlänge zurückzurechnen.

Potenz und Wurzel gehören zusammen

Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $g(x) = x^2$, wenn man sich auf $x \geq 0$ beschränkt. Beide Graphen liegen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden $y = x$. Die Einschränkung ist nötig, weil x^2 für positive und negative x denselben Wert liefert und deshalb ohne Einschränkung nicht umkehrbar ist. Schreibweise: $\sqrt{x} = x^{1/2}$ und $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. Mit dieser Schreibweise gelten die Potenzgesetze auch für Wurzeln, zum Beispiel $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x$. Eine negative Hochzahl bedeutet den Kehrwert: $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Damit bilden Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, Hyperbeln und Wurzelfunktionen eine zusammenhängende Familie.



Beispiel 6: Gleichungen mit negativem Exponenten

Löse $x^{-2} = \frac{1}{16}$ und $x^{-3} = 8$.

Weil $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ist, steht in der ersten Gleichung $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}$. Bilde den Kehrwert beider Seiten: $x^2 = 16$, also $x = 4$ oder $x = -4$. Bei der zweiten Gleichung ist $x^{-3} = \frac{1}{x^3} = 8$, also $x^3 = \frac{1}{8}$ und damit $x = \frac{1}{2}$. Es gibt nur eine Lösung, weil bei ungeradem Exponenten das Vorzeichen erhalten bleibt. Die Probe $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$ bestätigt das.

Beispiel 7: Wurzelgleichung mit Probe

Löse $\sqrt{2x + 3} = x$.

Zuerst wird die Wurzel isoliert, das ist hier schon der Fall. Dann quadrierst du beide Seiten: $2x + 3 = x^2$, also $x^2 - 2x - 3 = 0$. Mit der pq-Formel ergibt sich $x = 1 \pm 2$, also $x = 3$ oder $x = -1$. Jetzt folgt die Probe, denn Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Für $x = 3$ gilt $\sqrt{9} = 3$: wahr. Für $x = -1$ gilt $\sqrt{1} = 1$, aber die rechte Seite ist -1: falsch. Die einzige Lösung ist $x = 3$, und $x = -1$ ist eine Scheinlösung.

So gehst du vor: Wurzelgleichungen lösen

1. Bestimme den Definitionsbereich: Der Term unter der Wurzel muss größer oder gleich 0 sein.
2. Isoliere die Wurzel auf einer Seite der Gleichung.
3. Quadriere beide Seiten (bei dritter Wurzel: potenziere mit 3).
4. Löse die entstehende Gleichung, zum Beispiel mit der pq-Formel.
5. Mache die Probe in der ursprünglichen Gleichung und streiche Scheinlösungen.

Achtung: Typische Fehler

Erstens: $\sqrt{x^2} = |x|$ und nicht x. Zum Beispiel ist $\sqrt{(-3)^2} = 3$. Zweitens: $\sqrt{a+b}$ ist nicht $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Mit $a = 9$ und $b = 16$ ist $\sqrt{25} = 5$, aber $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. Drittens: Beim Verschieben nach rechts steht in der Wurzel $x - c$, das Vorzeichen ist also umgekehrt zur Richtung: Der Graph von $\sqrt{x+2}$ ist um 2 nach *links* verschoben. Viertens: Bei $x^n = c$ mit geradem n und c gibt es keine Lösung, weil gerade Potenzen nie negativ sind.

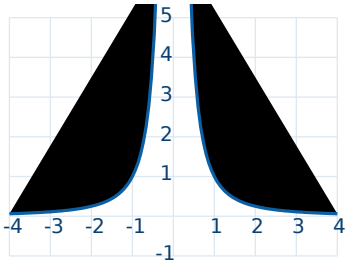
Potenz- und Wurzelfunktionen in der Anwendung

Viele Gesetze der Physik haben die Form einer Potenzfunktion. Für den freien Fall gilt $s = \frac{1}{2} g t^2$ mit $g \approx 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$. Löst man nach der Zeit auf, entsteht die Wurzelfunktion $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$. Die Beleuchtungsstärke einer Lampe nimmt mit dem Abstand nach der Hyperbel $E = \frac{a}{r^2}$ ab. Verdoppelst du den Abstand, sinkt die Helligkeit auf ein Viertel. Die Schwingungsdauer eines Pendels beträgt $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sie wächst also nur mit der Wurzel der Länge. Bei solchen Aufgaben setzt du die Daten in die Formel ein oder löst die Formel nach der gesuchten Größe auf.

Beispiel 8: Fallzeit vom Sprungturm

Ein Schwimmer springt vom 10-m-Turm. Wie lange dauert es bis zum Wasser (ohne Luftwiderstand)?

Aus $s = \frac{1}{2} g t^2$ folgt $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9{,}81}} = \sqrt{2{,}039} \approx 1{,}43$ s. Verdoppelt man die Höhe auf 20 m, so wächst die Zeit nicht auf das Doppelte, sondern nur auf das $\sqrt{2}$-Fache, das sind $2{,}02$ s.



Wusstest du? Kepler und die Planeten

Johannes Kepler entdeckte 1619, dass für alle Planeten das Quadrat der Umlaufzeit T zur dritten Potenz der großen Halbachse a proportional ist: $T^2 = a^3$ (mit a in Astronomischen Einheiten und T in Jahren). Aus $T = a^{3/2}$ berechnet man zum Beispiel für den Mars mit $a = 1{,}52$ die Umlaufzeit $T \approx 1{,}87$ Jahre. Solche Potenzgesetze sind in der Natur häufig, weil sie Größenverhältnisse beschreiben: Wird eine Länge verdoppelt, vervierfacht sich die Fläche und verachtfacht sich das Volumen.

Hinweis: Welche Aufgabe passt zu welchem Verfahren?

Beim Berechnen einer Größe aus einer Formel setzt du ein und rechnest. Bei der Gleichung $x^n = c$ ziehst du die n-te Wurzel (bei geradem n mit zwei Lösungen $\pm$, falls $c > 0$). Bei einer Gleichung, in der x unter einer Wurzel steht, quadrierst du und machst die Probe. Bei einer Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^n$ bestimmst du den Faktor a mit einem Punkt: Setze die Koordinaten ein und löse nach a auf. Zum Schluss lohnt sich immer ein Blick auf die Einheiten und auf die Frage, ob das Ergebnis zur Situation passt: Eine Fallzeit von 40 Sekunden aus 10 m Höhe oder ein negativer Radius können nicht stimmen. Schreibe deshalb zu jedem Ergebnis einen kurzen Antwortsatz mit Einheit.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Potenzfunktionen $f(x) = a \cdot x^n$ mit natürlichem n: bei geradem n achsensymmetrisch (Parabeln), bei ungeradem n punktsymmetrisch zum Ursprung; alle laufen durch $(0|0)$ und $(1|a)$.
- Je größer $|a|$, desto steiler der Graph; a spiegelt an der x-Achse.
- Negative Exponenten: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; die Graphen sind Hyperbeln mit den Koordinatenachsen als Asymptoten, $x = 0$ ist nicht definiert.
- $x^n = c$: bei geradem n und $c > 0$ zwei Lösungen $\pm\sqrt[n]{c}$, bei c keine; bei ungeradem n genau eine Lösung.
- Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x \geq 0$ ist die Umkehrfunktion von x^2 für $x \geq 0$; der Graph geht durch $(0|0)$, $(1|1)$, $(4|2)$.
- Verschiebung: $\sqrt{x - c} + d$ ist um c nach rechts und d nach oben verschoben; der Definitionsbereich ist $x \geq c$.
- Wurzelgleichungen: Wurzel isolieren, quadrieren, lösen und unbedingt die Probe machen (Scheinlösungen).
- Zwischen 0 und 1 ist x^n umso kleiner, je größer n; für $x > 1$ wächst x^n umso

schneller. Bei der Wurzel ist es umgekehrt.

Achtung

$(-3)^2 = 9$, aber $-3^2 = -9$. Bei $x^2 = 16$ gibt es die Lösungen $x = 4$ und $x = -4$. $\sqrt{x-3}$ existiert nur für $x \geq 3$, und $\sqrt{x^2} = |x|$. Bei $\frac{1}{x}$ darfst du $x = 0$ nicht einsetzen.

Beispiel 5: Verhalten für große Werte

Vergleiche x^2, $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ für $x = 100$.

Bei $x = 100$ ist $x^2 = 10\,000$, $\sqrt{x} = 10$ und $\frac{1}{x} = 0{,}01$. Die Quadratfunktion wächst viel schneller als x, die Wurzel nur langsam, und $\frac{1}{x}$ nähert sich der x-Achse an, bleibt aber positiv.

Ottos Tipp

Merke dir die Punkte $(0|0)$, $(1|1)$ und $(-1|\pm 1)$. Daran erkennst du jede Grundform sofort. Gerader Exponent bedeutet Spiegelbild links und rechts, ungerader Exponent bedeutet Drehung um den Ursprung.