Lösungen - Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) x^2: 4; 1; 0; 1; 4. x^3: -8; -1; 0; 1; 8. Man setzt jeden x-Wert ein; eine negative Zahl mit gerader Hochzahl wird positiv, mit ungerader Hochzahl bleibt sie negativ.
b) x^4: 16; 1; 0; 1; 16. Bei x^4 wird zweimal quadriert: $(-2)^4 = 16$.
c) Bei x^2 und x^4 (gerade Hochzahl) sind die Werte gleich, bei x^3 (ungerade Hochzahl) entgegengesetzt: $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$. Daraus folgt: Gerade Hochzahl bedeutet Achsensymmetrie zur y-Achse, ungerade Hochzahl Punktsymmetrie zum Ursprung.

Lösung zu Aufgabe 2

a) x^4: achsensymmetrisch, beide Enden nach oben. x^5: punktsymmetrisch, rechts oben, links unten. Der Exponent bestimmt die Symmetrie, für große $|x|$ wachsen die Werte sehr schnell; bei geradem Exponenten sind beide Enden positiv.
b) $-x^6$: achsensymmetrisch, beide Enden nach unten. $-x^7$: punktsymmetrisch, rechts unten, links oben. Das Minuszeichen spiegelt den Graphen an der x-Achse; dadurch drehen sich die Richtungen der Enden um.
c) x^4 (und x^6, x^2): alle mit geradem Exponenten und $a > 0$ haben eine parabelähnliche Form, nur flacher in der Nähe von 0 und steiler außen. Für $|x|$ sind die Werte bei höherem Exponenten kleiner, für $|x| > 1$ größer; deshalb wirken die Graphen in der Mitte flacher.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $f(2) = 16$: ja. $f(-1) = -2 \neq 2$: nein. $f(-2) = -16$: ja. Man setzt die x-Koordinate ein und vergleicht mit der y-Koordinate. Wegen der Punktsymmetrie liegt mit A auch C auf dem Graphen.
b) $g(3) = -81$: ja. $g(-2) = -16 \neq 16$: nein. $g(0) = 0$: ja. Das Minuszeichen steht vor der Potenz: $-(-2)^4 = -16$, nicht $+16$.
c) $h(3) = 1$: ja. $h(-1) = -3$: ja. U liegt nicht auf dem Graphen, $h(0)$ ist nicht definiert. An der Stelle $x = 0$ hat die Hyperbel keinen Funktionswert, dort ist eine Definitionslücke.

Lösung zu Aufgabe 4

Bei $x^n = c$ entscheidet die Hochzahl: Bei geradem n gibt es für $c > 0$ zwei Lösungen $\pm\sqrt[n]{c}$, bei ungeradem n genau eine Lösung mit dem Vorzeichen von c.
a) $x = 7$ oder $x = -7$. Gerade Hochzahl, $c > 0$: zwei Lösungen.
b) $x = -3$. Ungerade Hochzahl: eine negative Lösung, denn $(-3)^3 = -27$.

c) $x = 3$ oder $x = -3$. Gerade Hochzahl: $\sqrt[4]{81} = 3$.
d) $x = 2$. Ungerade Hochzahl: $2^5 = 32$.
e) Keine Lösung, denn $x^4 \geq 0$. Gerade Hochzahl und negative rechte Seite: leere Lösungsmenge.

Lösung zu Aufgabe 5

Man setzt die Koordinaten von P in die Gleichung ein und löst nach a auf.
a) $8a = 24$, $a = 3$; $f(x) = 3x^3$. Probe: $3 \cdot 8 = 24$.
b) $9a = 18$, $a = 2$; $f(x) = 2x^2$. Probe: $2 \cdot 9 = 18$.
c) $\frac{a}{4} = 0{,}5$, $a = 2$; $f(x) = \frac{2}{x}$. Probe: $\frac{2}{4} = 0{,}5$.
d) $\frac{a}{4} = 3$, $a = 12$; $f(x) = \frac{12}{x^2}$. Probe: $\frac{12}{4} = 3$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\frac{1}{x}$: $-0{,}25$; $-0{,}5$; -1; -2; 2; 1; $0{,}5$; $0{,}25$. $\frac{1}{x^2}$: $0{,}0625$; $0{,}25$; 1; 4; 4; 1; $0{,}25$; $0{,}0625$. Bei $\frac{1}{x}$ behalten die Werte das Vorzeichen von x, bei $\frac{1}{x^2}$ sind sie immer positiv.
b) Beide haben die x-Achse ($y = 0$) und die y-Achse ($x = 0$) als Asymptoten. Für große $|x|$ nähern sich die Werte 0, für $x \to 0$ werden sie betragsmäßig beliebig groß.
c) $\frac{1}{x}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, $\frac{1}{x^2}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Ungerader Exponent -1 bedeutet Punktsymmetrie, gerader Exponent -2 Achsensymmetrie.
d) Alle positiven Zahlen: $y > 0$. Der Wert 0 wird nie erreicht, negative Werte kommen nicht vor.

Lösung zu Aufgabe 7

Ein negativer Exponent bedeutet den Kehrwert: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Ein Faktor vor der Potenz bleibt im Zähler.
a) $\frac{1}{x^2}$; für $x = 2$: $\frac{1}{4} = 0{,}25$.
b) $\frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{8x^3}$; für $x = 2$: $\frac{1}{64} = 0{,}0156$. Hier gehört der Faktor 2 mit in die Klammer und wird ebenfalls potenziert.
c) $\frac{3}{x}$; für $x = 2$: $1{,}5$. Der Exponent bezieht sich nur auf x, nicht auf die 3.
d) $\frac{5}{x^2}$; für $x = 2$: $\frac{5}{4} = 1{,}25$. Gleiches gilt hier für den Faktor 5.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $x \geq 3$; Nullstelle $x = 3$. Der Radikand $x - 3$ darf nicht negativ sein; die Nullstelle liegt dort, wo der Radikand null ist.
b) $2x + 4 \geq 0$, also $x \geq -2$; Nullstelle $x = -2$. Man löst die Ungleichung $2x + 4 \geq 0$.
c) $5 - x \geq 0$, also $x \leq 5$; Nullstelle $x = 5$. Beim Auflösen von $5 - x \geq 0$ dreht sich durch die Multiplikation mit -1 das Ungleichheitszeichen.
d) $x \geq 0$; $\sqrt{x} = 2$, also $x = 4$. Hier wird von der Wurzel 2 subtrahiert; die Nullstelle liegt deshalb nicht am Rand des Definitionsbereichs.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Definitionsbereich $x \geq -2$, Wertebereich $y \geq -1$. Der Radikand muss nicht negativ sein; die Wurzel ist mindestens 0, also ist $f(x)$ mindestens -1.
b) $\sqrt{x+2} = 1$, $x + 2 = 1$, $x = -1$. $f(0) = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41$. Für die Nullstelle setzt man $f(x) = 0$ und quadriert; für den y-Achsenabschnitt setzt man $x = 0$ ein.
c) Verschiebung um 2 nach links und um 1 nach unten. $+2$ unter der Wurzel verschiebt nach links, -1 außerhalb nach unten.
d) $f(2) = \sqrt{4} - 1 = 1$; $f(7) = \sqrt{9} - 1 = 2$. Gut geeignet sind x-Werte, für die $x + 2$ eine Quadratzahl ist.

Lösung zu Aufgabe 10

Man isoliert die Wurzel, quadriert beide Seiten und löst die entstehende Gleichung. Weil Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, ist die Probe Pflicht.
a) $x = 25$. Probe: $\sqrt{25} = 5$.
b) $x + 4 = 9$, $x = 5$. Probe: $\sqrt{9} = 3$.
c) $2x + 3 = x^2$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = 3$ oder $x = -1$. Probe: $x = 3$ wahr, $x = -1$ falsch. Lösung $x = 3$. Die Wurzel kann nicht negativ sein, deshalb scheidet $x = -1$ aus.
d) $x + 6 = x^2$, $x^2 - x - 6 = 0$, $x = 3$ oder $x = -2$. Probe: $x = 3$ wahr, $x = -2$ falsch. Lösung $x = 3$. Bei $x = -2$ wäre links $\sqrt{4} = 2$, rechts -2.
e) $3x + 4 = x^2$, $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x = 4$ oder $x = -1$. Probe: $x = 4$ wahr, $x = -1$ falsch. Lösung $x = 4$. Bei $x = -1$ wäre links $\sqrt{1} = 1$, rechts -1.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $t(5) = \sqrt{\frac{10}{9{,}81}} \approx 1{,}01$ s; $t(20) \approx 2{,}02$ s; $t(45) \approx 3{,}03$ s; $t(100) \approx 4{,}52$ s. Man setzt die Höhen ein; bei vierfacher Höhe verdoppelt sich die Fallzeit.
b) $t = \sqrt{\frac{20}{9{,}81}} \approx 1{,}43$ s. Antwort: Vom 10-m-Turm fällt man etwa 1,4 Sekunden.
c) $s = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 9 = 44{,}1$ m. Man stellt die Formel nach h um: $h = \frac{1}{2} g t^2$.
d) Die Zeit verdoppelt sich: $\sqrt{4} = 2$. Denn die Höhe steht unter der Wurzel.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $r = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \approx 3{,}99$ m. Aus $A = \pi r^2$ folgt $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.
b) $a = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ m. Aus $A = a^2$ folgt $a = \sqrt{A}$.
c) Kreis: $u = 2\pi r \approx 25{,}07$ m, Kosten ≈ 301 €. Quadrat: $u = 4a \approx 28{,}28$ m, Kosten ≈ 339 €. Der Kreis ist günstiger. Man berechnet beide Umfänge und multipliziert mit 12 €. Bei gleicher Fläche hat der Kreis den kleinsten Umfang.
d) Der Radius verdoppelt sich, denn r wächst mit $\sqrt{A}$ und $\sqrt{4} = 2$. Bei vierfacher Fläche verdoppelt sich der Radius.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} \approx 2{,}006$ s. Man setzt $l = 1$ m ein.

b) $\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{\pi}$, $l = \frac{g}{\pi^2} \approx 0{,}994$ m, also fast genau 1 m. Man setzt $T = 2$ s, teilt durch 2π und quadriert.

c) Die Dauer verdoppelt sich ($\sqrt{4} = 2$). Vierfache Länge bedeutet doppelte Schwingungsdauer.

d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{9}{9{,}81}} \approx 6{,}02$ s. Man setzt die neue Länge in die Formel ein.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $T = 0{,}72^{1{,}5} \approx 0{,}61$ Jahre. Man setzt die Halbachse in $T = a^{3/2}$ ein. Antwort: Die Venus braucht etwa 0,61 Jahre (225 Tage).

b) Mars: $1{,}52^{1{,}5} \approx 1{,}87$; Jupiter: $5{,}2^{1{,}5} \approx 11{,}86$ Jahre. Je weiter außen der Planet, desto länger die Umlaufzeit.

c) $a = 29{,}5^{2/3} \approx 9{,}55$ AE. Hier ist die Umlaufzeit gegeben; man rechnet mit $a = T^{2/3}$.

d) $T = 39{,}5^{1{,}5} \approx 248$ Jahre. Antwort: Ein Umlauf dauert etwa 248 Jahre.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $V = 1000;\ 8000;\ 64\,000$ cm³; $O = 600;\ 2400;\ 9600$ cm². Man setzt die Kantenlängen in die Formeln ein.

b) $a = \sqrt[3]{1000} = 10$ cm. Man zieht die dritte Wurzel aus dem Volumen.

c) Das Volumen wird 8-mal so groß (2^3), die Oberfläche 4-mal so groß (2^2). Volumen wächst mit der dritten, Oberfläche mit der zweiten Potenz der Kante.

d) 9600 cm² $= 0{,}96$ m²; Kosten $0{,}96 \cdot 0{,}40 \approx 0{,}38$ €. Man rechnet cm² in m² um und multipliziert mit dem Preis.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $a = 300 \cdot 4 = 1200$. Man setzt $r = 2$ und $E = 300$ ein und löst nach a auf.

b) $E(1) = 1200$; $E(3) = \frac{1200}{9} \approx 133{,}3$; $E(6) = \frac{1200}{36} \approx 33{,}3$ Lux. Man setzt die Abstände in $E(r) = \frac{1200}{r^2}$ ein.

c) $\frac{1200}{r^2} = 100$, $r^2 = 12$, $r = \sqrt{12} \approx 3{,}46$ m. Man löst nach r^2 auf und zieht die Wurzel.

d) Sie sinkt auf ein Neuntel. Dreifacher Abstand bedeutet $\frac{1}{3^2}$ der Beleuchtungsstärke.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $\frac{2}{1} = \frac{16}{8} = \frac{54}{27} = \frac{128}{64} = 2$: konstant, passt. Ist der Quotient $y : x^3$ konstant, ist er der Faktor a.

b) $12 \cdot 1 = 12$, $3 \cdot 4 = 12$, $1{,}33 \cdot 9 \approx 12$, $0{,}75 \cdot 16 = 12$: konstant, passt. Ist das Produkt $y \cdot x^2$ konstant, ist es der Faktor a.

c) $y = 2x^3$ und $y = \frac{12}{x^2}$. Die konstanten Werte sind die Faktoren der Funktionsgleichungen.
d) $y(10) = 2 \cdot 1000 = 2000$; $y(6) = \frac{12}{36} \approx 0{,}33$. Man setzt die neuen x-Werte in die Gleichungen ein.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $v(10) = \sqrt{98{,}1} \approx 9{,}9$; $v(100) \approx 31{,}3$; $v(1000) \approx 99{,}0$; $v(4000) \approx 198{,}1$ m/s. Man setzt jede Tiefe ein und zieht die Wurzel aus $9{,}81 \cdot h$.
b) $198{,}1 \cdot 3{,}6 \approx 713$ km/h, so schnell wie ein Verkehrsflugzeug. Umrechnung von m/s in km/h mit dem Faktor 3,6.
c) $20^2 = 9{,}81h$, $h = \frac{400}{9{,}81} \approx 40{,}8$ m. Man quadriert beide Seiten und löst nach h auf.
d) Die Geschwindigkeit ist eine Wurzelfunktion der Tiefe. Wird das Wasser flacher, sinkt v. Die Welle staut sich und wird dadurch höher. Deshalb ist ein Tsunami an der Küste so gefährlich.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $a\sqrt{4} + 1 = 5$, $2a = 4$, $a = 2$. Man setzt $P(6|5)$ ein: $\sqrt{6-2} = 2$.
b) $x \geq 2$, $y \geq 1$. Der Radikand muss nicht negativ sein; der kleinste Funktionswert ist 1 bei $x = 2$.
c) $f(11) = 2\sqrt{9} + 1 = 7$. Antwort: $f(11) = 7$.
d) $2\sqrt{x-2} + 1 = 9$, $\sqrt{x-2} = 4$, $x - 2 = 16$, $x = 18$. Man isoliert die Wurzel, quadriert und löst. Probe: $2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $x^2 = \sqrt{x}$: quadrieren $x^4 = x$, $x(x^3 - 1) = 0$, $x = 0$ oder $x = 1$. Schnittpunkte $(0|0)$ und $(1|1)$; dazwischen liegt x^2 unter $\sqrt{x}$. Durch Quadrieren entsteht eine Potenzgleichung, die man durch Ausklammern löst.
b) $x^3 = \sqrt{x}$: $x^6 = x$, $x(x^5 - 1) = 0$, $x = 0$ oder $x = 1$. Schnittpunkte $(0|0)$, $(1|1)$. Für 0 liegt x^3 noch tiefer unter $\sqrt{x}$ als x^2.
c) $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$: $1 = x^{3/2}$, $x = 1$. Schnittpunkt $(1|1)$. Man multipliziert mit x und schreibt $x \cdot \sqrt{x} = x^{3/2}$.
d) $x^2 = \frac{1}{x^2}$: $x^4 = 1$, $x = \pm 1$. Schnittpunkte $(1|1)$ und $(-1|1)$. Beide Graphen sind achsensymmetrisch, deshalb gibt es zwei symmetrische Schnittpunkte.