Lösungen zur Klassenarbeit - Logarithmen

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Der Logarithmus $\log_b a$ ist der Exponent, mit dem man b potenzieren muss, um a zu erhalten.
a) Wegen $2^6 = 64$ gilt $\log_2 64 = 6$ (1 P.).
b) $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, also $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (1 P.). Logarithmen von Zahlen zwischen 0 und 1 sind bei einer Basis größer als 1 negativ.
c) $\lg$ bezeichnet den Zehnerlogarithmus. $0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, also $\lg 0{,}001 = -3$ (1 P.).
d) $2 = \sqrt{4} = 4^{1/2}$, deshalb $\log_4 2 = 0{,}5$ (1 P.). Probe zu allen Teilen: Die Potenz aus Basis und Ergebnis muss wieder die Ausgangszahl ergeben, etwa $4^{0{,}5} = 2$. Antwort: 6; -2; -3; $0{,}5$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Produktgesetz $\log_b u + \log_b v = \log_b(uv)$: $\log_2 12 + \log_2 \frac{2}{3} = \log_2(12 \cdot \frac{2}{3}) = \log_2 8 = 3$, da $2^3 = 8$ (1 P.).
b) Quotientengesetz $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$: $\lg 200 - \lg 2 = \lg 100 = 2$ (1 P.).
c) Zuerst das Potenzgesetz $r \log_b u = \log_b(u^r)$: $2 \log_3 6 = \log_3 36$. Dann das Quotientengesetz: $\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 9 = 2$ (1 P.).
d) Rückwärts zerlegt man in Summen: $\log_b(x^2 y) = \log_b(x^2) + \log_b y = 2 \log_b x + \log_b y$ (1 P.). Gültig für $x, y > 0$. In a) bis c) lohnt sich das Zusammenfassen, weil dadurch ein glatter Numerus wie 8, 100 oder 9 entsteht, dessen Logarithmus man ohne Taschenrechner kennt. Typischer Fehler: $\log_b(u + v) = \log_b u + \log_b v$ schreiben; dieses Gesetz gibt es nicht. Antwort: 3; 2; 2; $2 \log_b x + \log_b y$.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Exponentialgleichungen löst man, indem man beide Seiten logarithmiert; dann gilt $\lg(b^x) = x \cdot \lg b$.
a) $3^x = 50$ führt auf $x = \frac{\lg 50}{\lg 3} \approx \frac{1{,}699}{0{,}477} \approx 3{,}56$ (1 P.). Kontrolle: $3^3 = 27$ und $3^4 = 81$, das Ergebnis liegt dazwischen.
b) Wegen $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ teilt man zuerst durch 2: $2^x = 12$, $x = \frac{\lg 12}{\lg 2} \approx 3{,}58$ (1 P.).
c) $1{,}04^x = 1{,}5$ ergibt $x = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}04} \approx 10{,}34$ (1 P.). Deutung: Bei $4\,\%$ Wachstum dauert es gut zehn Perioden, bis der Bestand um die Hälfte gewachsen ist.
d) Erst durch 5 teilen: $0{,}8^x = 0{,}4$; dann $x = \frac{\lg 0{,}4}{\lg 0{,}8} \approx 4{,}11$ (1 P.). Antwort: $3{,}56$; $3{,}58$; $10{,}34$; $4{,}11$.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Anfangskapital 5000 €, Zinsfaktor $1 + 0{,}035 = 1{,}035$: $K(n) = 5000 \cdot 1{,}035^n$ (1 P.).
b) $5000 \cdot 1{,}035^n = 8000$ ergibt $1{,}035^n = 1{,}6$. Logarithmieren: $n = \frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}035} \approx 13{,}66$ (1 P.). Da Zinsen am Jahresende gutgeschrieben werden, sind die 8000 € nach 14 Jahren erreicht.
c) Verdopplung bedeutet Faktor 2, unabhängig vom Startkapital: $n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}035} \approx 20{,}15$ Jahre, also nach 21 vollen Jahren (1 P.).
d) Die 72er-Regel schätzt die Verdopplungszeit durch $\frac{72}{\text{Zinssatz}}$: $\frac{72}{3{,}5} \approx 20{,}6$ Jahre. Die Abweichung zum genauen Wert beträgt nur etwa ein halbes Jahr; die Faustregel ist bei kleinen Zinssätzen gut brauchbar (1 P.).

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) $\mathrm{pH} = -\lg(2{,}5 \cdot 10^{-4}) = -(\lg 2{,}5 + \lg 10^{-4}) = -(0{,}398 - 4) \approx 3{,}60$ (1 P.). Die Lösung ist sauer, da der Wert unter 7 liegt.
b) Umstellen: $\lg c = -\mathrm{pH}$, also $c = 10^{-\mathrm{pH}} = 10^{-8{,}3} \approx 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ mol/l (1 P.).
c) $c_3 = 10^{-3}$ und $c_6 = 10^{-6}$. Quotient: $\frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^3 = 1000$. Bei pH 3 ist die Konzentration also tausendmal so groß (1 P.).
d) Nein. Jede pH-Einheit entspricht einem Faktor 10 in der Konzentration. Zwischen pH 4 und pH 8 liegen vier Einheiten, also der Faktor $10^4 = 10\,000$ (1 P.). Die Lösung mit pH 4 ist damit zehntausendmal so sauer, nicht doppelt so sauer. Das liegt an der logarithmischen Skala.