Lernzettel - Logarithmen

Klasse: Klasse 10

Bei $2^3 = 8$ kennst du Basis und Exponenten und suchst die Potenz. Beim Logarithmus fragst du umgekehrt: Mit welcher Zahl muss ich 2 potenzieren, um 8 zu erhalten?

Einstieg: Wie lange dauert es?

Dein Sparbuch wächst jedes Jahr um 3 %. Nach wie vielen Jahren sind aus 2000 € genau 3000 € geworden? Mit den Potenzen aus dem letzten Kapitel kannst du die Gleichung $2000 \cdot 1{,}03^n = 3000$ aufstellen, aber du kannst sie noch nicht lösen, denn die gesuchte Zahl steht im Exponenten. Der Logarithmus ist genau die fehlende Rechenart: Er fragt nach dem Exponenten. So wie die Wurzel die Umkehrung des Potenzierens in Bezug auf die Basis ist, ist der Logarithmus die Umkehrung in Bezug auf den Exponenten. In diesem Kapitel lernst du, Logarithmen zu berechnen, ihre Rechengesetze zu nutzen und Exponentialgleichungen zu lösen.

Der Logarithmus

Definition: Logarithmus

Für $b > 0$, $b \neq 1$ und $a > 0$ gilt:

$$\log_b a = x \iff b^x = a$$

Der **Logarithmus** $\log_b a$ ist der Exponent, mit dem man die Basis b potenzieren muss, um a zu bekommen. Die Zahl a heißt **Numerus** und muss positiv sein: $\log_2(-4)$ und $\log_2 0$ gibt es nicht.

Definition: dekadischer Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis 10 heißt **dekadischer Logarithmus** und wird $\lg a$ geschrieben (Taschenrechnertaste LOG). Es gilt $\lg 1000 = 3$, $\lg 0{,}01 = -2$ und $\lg 10^n = n$.

Merke: Besondere Werte

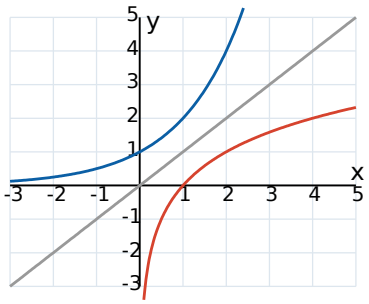
Immer gelten $\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$ und $\log_b b^n = n$. Beispiel: $\log_3 81 = 4$, denn $3^4 = 81$.

Logarithmus als Umkehrfunktion

Satz: Umkehrung der Exponentialfunktion

$f(x) = \log_b x$ ist die Umkehrfunktion von $g(x) = b^x$. Der Graph entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$. Der Definitionsbereich ist $]0; \infty[$, die y-

Achse ist senkrechte Asymptote. Der Graph geht durch $(1|0)$ und $(b|1)$.



Blau: $y = 2^x$. Rot: $y = \log_2 x$. Grau: Spiegelachse $y = x$.

Die Rechenregeln

Satz: Logarithmusgesetze

Für $u, v > 0$ und jede reelle Zahl r gilt:

- **Produkt:** $\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$
- **Quotient:** $\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$
- **Potenz:** $\log_b(u^r) = r \cdot \log_b u$

Sie folgen aus den Potenzgesetzen: Aus $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ wird beim Logarithmieren eine Summe.

Achtung

Für $\log_b(u + v)$ gibt es keine Regel. Es ist $\lg 5 \neq \lg 2 + \lg 3$, denn $\lg 2 + \lg 3 = \lg 6$. Auch $\frac{\lg a}{\lg b}$ ist nicht $\lg a - \lg b$.

Beispiel 1: Regeln anwenden

Berechne $\lg 4 + \lg 25$, $\log_2 24 - \log_2 3$ und $\log_5 125^2$.

$\lg 4 + \lg 25 = \lg 100 = 2.$

$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 8 = 3.$

$\log_5 125^2 = 2 \cdot \log_5 125 = 2 \cdot 3 = 6.$

Exponentialgleichungen lösen

Satz: Basiswechsel

Aus $b^x = c$ folgt $x = \log_b c = \frac{\lg c}{\lg b}$. Diese Umrechnung heißt **Basiswechsel**. Sie ist nötig, weil der Taschenrechner nur $\lg$ und $\ln$ kennt.

So gehst du vor: b hoch x gleich c lösen

1. Stehen Faktoren vor der Potenz, teile zuerst durch sie.
2. Logarithmiere beide Seiten oder schreibe $x = \log_b c$.
3. Wechsle die Basis: $x = \frac{\lg c}{\lg b}$.
4. Mache die Probe und prüfe, ob das Ergebnis zwischen zwei bekannten Potenzen liegt.

Beispiel 2: Einfache Gleichung

Löse $2^x = 50$.

$x = \frac{\lg 50}{\lg 2} \approx \frac{1{,}699}{0{,}301} \approx 5{,}64$. Probe: $2^5 = 32$ und $2^6 = 64$ liegen um 50 herum, das passt.

Beispiel 3: Zinseszins

Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 5 % Zinsen?

Gesucht ist n mit $1{,}05^n = 2$. Es folgt $n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} \approx \frac{0{,}30103}{0{,}02119} \approx 14{,}2$. Nach etwa 14,2 Jahren, also im 15. Jahr, hat sich das Kapital verdoppelt.

Beispiel 4: Mit Faktor

Löse $3 \cdot 1{,}2^x = 12$.

Erst durch 3 teilen: $1{,}2^x = 4$. Dann $x = \frac{\lg 4}{\lg 1{,}2} \approx \frac{0{,}602}{0{,}0792} \approx 7{,}60$.

Gleichungen mit dem Logarithmus

Steht der Logarithmus selbst in der Gleichung, wendest du die Definition an. Aus $\log_3 x = 4$ wird $x = 3^4 = 81$. Bei $\log_x 64 = 3$ ist die Basis gesucht: $x^3 = 64$, also $x = 4$. Die Basis muss positiv und ungleich 1 sein, der Numerus positiv. Mache deshalb die Probe.

Beispiel 5: Schrittweise

Löse $2 \cdot \lg x = 6$.

Durch 2 teilen: $\lg x = 3$. Als Potenz schreiben: $x = 10^3 = 1000$. Probe: $2 \cdot \lg 1000 = 6$. Passt, und $x > 0$ ist erfüllt.

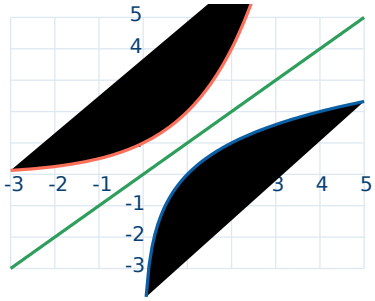
Anwendungen

Hinweis

Viele Größen werden logarithmisch gemessen, weil sie über viele Zehnerpotenzen schwanken. Der **pH-Wert** ist $\mathrm{pH} = -\lg c$ (Konzentration c in mol/l). Die Lautstärke in Dezibel ist $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$: Zehnmal mehr Schallintensität bedeutet 10 dB mehr. Auch die Richterskala ist logarithmisch. Früher nutzte man Logarithmentafeln, um aus Multiplikationen einfache Additionen zu machen.

Logarithmen im Alltag

Logarithmen begegnen dir öfter, als du denkst. Der pH-Wert einer Lösung ist der negative dekadische Logarithmus der Konzentration der Wasserstoff-Ionen: $\mathrm{pH} = -\lg c$. Eine Säure mit dem pH-Wert 3 ist daher nicht „ein bisschen“ saurer als eine mit pH 4, sondern zehnmal so sauer. Die Lautstärke wird in Dezibel gemessen, $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$. Wenn sich die Schallintensität verzehnfacht, steigt der Pegel nur um 10 dB. Erdbeben werden auf der Richterskala angegeben: Eine Magnitude, die um 1 größer ist, bedeutet etwa die 31-fache freigesetzte Energie. In allen Fällen werden sehr große Zahlenbereiche zu überschaubaren Zahlen zusammengestaucht. Das ist die Stärke einer logarithmischen Skala. Aus diesem Grund sind Gleichheit von Abständen auf der Skala und gleiche Faktoren in der Wirklichkeit dasselbe.



Beispiel 7: Logarithmen im Kopf

Berechne ohne Taschenrechner: $\log_2 32$**,** $\log_3 \frac{1}{27}$**,** $\lg 0{,}001$**,** $\log_4 2$ **und** $\log_8 4$**.**

Du fragst jeweils: Mit welchem Exponenten ergibt die Basis den Numerus? Wegen $2^5 = 32$ ist $\log_2 32 = 5$. Wegen $3^{-3} = \frac{1}{27}$ ist $\log_3 \frac{1}{27} = -3$. Wegen $10^{-3} = 0{,}001$ ist $\lg 0{,}001 = -3$. Wegen $4^{0{,}5} = \sqrt{4} = 2$ ist $\log_4 2 = 0{,}5$. Schließlich löst man $8^x = 4$ mit $8 = 2^3$ und $4 = 2^2$: $2^{3x} = 2^2$, also $3x = 2$ und $x = \frac{2}{3}$.

Beispiel 8: Rechengesetze rückwärts anwenden

Fasse zu einem Logarithmus zusammen und berechne: $\log_2 12 + \log_2 \frac{4}{3}$**,** $\lg 50 + \lg 2$**,** $2 \log_3 6 - \log_3 4$**.**

Nach der Produktregel ist $\log_2 12 + \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 \left(12 \cdot \frac{4}{3}\right) = \log_2 16 = 4$. Ebenso $\lg 50 + \lg 2 = \lg 100 = 2$. Beim dritten Term wird zuerst die Potenzregel benutzt: $2 \log_3 6 = \log_3 36$. Mit der Quotientenregel folgt $\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 9 = 2$. Der Trick besteht immer darin, aus Summen und Differenzen von Logarithmen Produkte und Quotienten im Numerus zu machen, bei denen sich eine glatte Zahl ergibt.

Achtung: Häufige Fehler

Die Regel $\log_b(u+v) = \log_b u + \log_b v$ ist falsch. Es gibt keine Rechenregel für den Logarithmus einer Summe. Ebenso ist $\log_b(u \cdot v)$ nicht $\log_b u \cdot \log_b v$. Außerdem darf der Numerus nie null oder negativ werden: Bei $\log_2(x-3)$ muss $x > 3$ gelten. Bei Gleichungen musst du deshalb am Ende prüfen, ob die gefundenen Lösungen im Definitionsbereich liegen. Und schließlich: Der Basiswechsel verlangt einen Bruch, $\log_2 10 = \frac{\lg 10}{\lg 2}$, nicht die Differenz.

Beispiel 9: pH-Wert berechnen

In einer Lösung beträgt die Konzentration der Wasserstoff-Ionen $c = 3 \cdot 10^{-4}$ mol/l. Wie groß ist der pH-Wert?

Es gilt $\mathrm{pH} = -\lg c = -\lg(3 \cdot 10^{-4}) = -(\lg 3 + \lg 10^{-4}) = -(0{,}477 - 4) = 3{,}52$. Die Lösung ist also sauer. Umgekehrt gehört zu pH 8,3 die Konzentration $c = 10^{-8{,}3} \approx 5 \cdot 10^{-9}$ mol/l, denn aus $-\lg c = 8{,}3$ folgt $c = 10^{-8{,}3}$.

So gehst du vor: Eine Exponentialgleichung lösen

1. Bringe die Gleichung auf die Form $b^x = c$, indem du den Faktor vor der Potenz durch Teilen entfernst.
2. Logarithmiere beide Seiten oder schreibe sofort $x = \log_b c$.
3. Wenn b nicht 10 ist, benutze den Basiswechsel: $x = \frac{\lg c}{\lg b}$.
4. Berechne den Wert mit dem Taschenrechner und runde sinnvoll.
5. Prüfe mit der Probe, indem du das Ergebnis in die Ausgangsgleichung einsetzt.

Beispiel 10: Verdopplungszeit berechnen

Ein Kapital wächst mit 3,5 % pro Jahr. Wann hat es sich verdoppelt?

Gesucht ist n mit $1{,}035^n = 2$. Mit dem Logarithmus folgt $n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}035} = \frac{0{,}30103}{0{,}01494} \approx 20{,}15$. Nach gut 20 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt. Die 72er-Regel liefert zur Kontrolle $\frac{72}{3{,}5} \approx 20{,}6$ Jahre, also ein ähnliches Ergebnis.

Die Graphen im Zusammenhang

Der Graph von $y = \log_b x$ entsteht durch Spiegelung des Graphen von $y = b^x$ an der Winkelhalbierenden $y = x$. Alle Eigenschaften der Exponentialfunktion übertragen sich daher: Der Definitionsbereich der Exponentialfunktion, alle reellen Zahlen, wird zum Wertebereich des Logarithmus, der Wertebereich der Exponentialfunktion, die positiven Zahlen, wird zum Definitionsbereich. Der Logarithmus wächst für $b > 1$ beständig, aber immer langsamer. Um den Funktionswert 10 zu erreichen, benötigt $\log_2 x$ bereits $x = 1024$. Das ist die Kehrseite des schnellen Wachstums der Exponentialfunktion. Für Basen zwischen 0 und 1 ist der Logarithmus dagegen fallend, und für $x = 1$ ist der Funktionswert

immer 0, weil $b^0 = 1$ gilt. Alle Graphen der Logarithmusfunktionen laufen deshalb durch den Punkt $(1|0)$ und schmiegen sich für $x \to 0$ an die y-Achse an. Wenn du in einer Aufgabe eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = \log_b x$ aus einem Punkt $(x_0|y_0)$ bestimmen sollst, setzt du ein und löst $b^{y_0} = x_0$ nach b auf.

Warum die Rechengesetze gelten

Die Logarithmengesetze sind nichts anderes als die Potenzgesetze in anderer Schreibweise. Setzt du $u = b^s$ und $v = b^t$, dann ist $s = \log_b u$ und $t = \log_b v$. Aus dem Potenzgesetz $b^s \cdot b^t = b^{s+t}$ folgt $uv = b^{s+t}$, also $\log_b(uv) = s + t = \log_b u + \log_b v$. Aus $b^s : b^t = b^{s-t}$ ergibt sich die Quotientenregel, und aus $(b^s)^r = b^{sr}$ folgt die Potenzregel $\log_b(u^r) = r \log_b u$. Wer sich die Herkunft merkt, muss die Formeln nicht auswendig lernen: Das Multiplizieren der Zahlen entspricht dem Addieren der Exponenten.

Beispiel 11: Gleichung mit Logarithmus lösen

Löse $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = 5$.

Der Definitionsbereich verlangt $x + 3 > 0$ und $x - 1 > 0$, also $x > 1$. Mit der Produktregel wird die linke Seite zu $\log_2\big((x+3)(x-1)\big)$. Daraus folgt $(x+3)(x-1) = 2^5 = 32$, also $x^2 + 2x - 3 = 32$ und $x^2 + 2x - 35 = 0$. Die pq-Formel liefert $x = -1 \pm 6$, also $x = 5$ oder $x = -7$. Nur $x = 5$ liegt im Definitionsbereich. Probe: $\log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$. Das stimmt.

Beispiel 12: Exponentialgleichung mit Faktor

Ein Bestand von 80 Einheiten sinkt jeden Tag um 12 %. Wann sind nur noch 20 Einheiten übrig?

Gesucht ist t mit $80 \cdot 0{,}88^t = 20$. Teilen durch 80 ergibt $0{,}88^t = 0{,}25$. Mit dem Logarithmus folgt $t = \frac{\lg 0{,}25}{\lg 0{,}88} = \frac{-0{,}602}{-0{,}0555} \approx 10{,}8$. Nach etwa 11 Tagen sind weniger als 20 Einheiten übrig. Weil beide Logarithmen negativ sind, ist der Quotient positiv. Das Ergebnis passt zur Überlegung, dass zwei Halbierungen nötig sind und eine Abnahme um 12 % pro Tag die Halbwertszeit von etwa 5,4 Tagen ergibt.

Hinweis: Taschenrechner richtig bedienen

Auf dem Taschenrechner steht die Taste „log“ für den dekadischen Logarithmus $\lg$ und „ln“ für den natürlichen Logarithmus zur Basis $e \approx 2{,}718$. Für den Basiswechsel darfst du beide benutzen, denn $\frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. Achte auf die Klammern: $\lg(4/3)$ ist etwas anderes als $\lg 4/3$. Bei Quotienten von Logarithmen setzt du den Zähler und den Nenner in eigene Klammern oder rechnest in zwei Schritten.

Wusstest du? Rechenschieber und Logarithmentafel

Der schottische Mathematiker John Napier veröffentlichte 1614 die ersten Logarithmentafeln. Sie verwandelten das mühsame Multiplizieren großer Zahlen in ein

Addieren, denn $\lg(uv) = \lg u + \lg v$. Astronomen sparten dadurch Jahre an Rechenarbeit. Bis in die 1970er Jahre benutzten Schüler und Ingenieure den Rechenschieber, auf dessen Skalen die Logarithmen der Zahlen aufgetragen sind: Zwei Längen zu addieren heißt dort, zwei Zahlen zu multiplizieren. Erst der Taschenrechner machte beide überflüssig.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- $\log_b a = x$ bedeutet $b^x = a$ ($b > 0$, $b \neq 1$, $a > 0$): Der Logarithmus ist der Exponent.
- $\lg$ steht für die Basis 10; es gilt $\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$, $\log_b b^n = n$.
- Produktregel $\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$, Quotientenregel $\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$, Potenzregel $\log_b(u^r) = r \cdot \log_b u$.
- Es gibt keine Regel für $\log_b(u + v)$; der Numerus muss immer positiv sein.
- Basiswechsel: $\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$; damit berechnest du jeden Logarithmus mit dem Taschenrechner.
- Exponentialgleichung $b^x = c$ hat die Lösung $x = \log_b c = \frac{\lg c}{\lg b}$.
- Der Graph von $\log_b x$ ist die Spiegelung des Graphen von b^x an $y = x$; die y-Achse ist senkrechte Asymptote.
- Logarithmische Skalen (pH-Wert, Dezibel, Richterskala) machen große Faktoren zu kleinen Zahlenschritten.

Achtung

Beim Basiswechsel dürfen Zähler und Nenner nicht vertauscht werden: $\log_2 10 = \frac{\lg 10}{\lg 2} \approx 3{,}32$. Negative Zahlen oder null sind als Numerus verboten. Teile zuerst durch einen Faktor vor der Potenz.

Beispiel 6: Logarithmus berechnen

Berechne $\log_2 32$, $\log_{10} 0{,}001$ und $\log_9 3$.

$\log_2 32 = 5$, denn $2^5 = 32$.

$\log_{10} 0{,}001 = -3$, denn $10^{-3} = 0{,}001$.

$\log_9 3 = \frac{1}{2}$, denn $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$.

Merke: Wann braucht man den Logarithmus?

Der Logarithmus gibt dir die Antwort auf die Frage „Wie lange dauert es?“ bei Wachstum und Zerfall: Wann ist ein Kapital verdoppelt, wann ist ein Medikament abgebaut? Er taucht in Klassenarbeiten fast immer zusammen mit Exponentialfunktionen auf und gehört zu den wichtigsten Werkzeugen der Oberstufe.

Ottos Tipp

Übersetze den Logarithmus immer zurück in eine Potenz. $\log_3 81 = x$ bedeutet $3^x = 81$, und das siehst du sofort: $x = 4$. Bei Rechenregeln hilft ein Test mit kleinen Zahlen, etwa mit $\lg 100$ und $\lg 10$.