Arbeitsblatt - Logarithmen

Klasse: Klasse 10 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Logarithmen berechnen

Berechne die Logarithmen im Kopf. Überlege jeweils: Mit welchem Exponenten ergibt die Basis den Numerus?

	$\log_2 8$	$\log_3 81$	$\log_5 25$	$\lg 1000$	$\log_7 1$	$\log_9 3$
Wert	?	?	?	?	?	?

a) Fülle die Tabelle aus und begründe jeden Wert mit einer Potenz.
b) Berechne außerdem $\log_2 \frac{1}{4}$, $\lg 0{,}01$ und $\log_{10} 1$.
c) Erkläre in einem Satz, warum $\log_2(-4)$ nicht existiert.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Von der Potenz zum Logarithmus

Schreibe jede Aussage in die andere Form um: Potenz in Logarithmus bzw. Logarithmus in Potenz.

a) $2^5 = 32$
b) $10^{-3} = 0{,}001$
c) $3^x = 7$
d) $\log_4 64 = 3$
e) $\log_5 x = -2$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Die gesuchte Größe bestimmen

Bestimme in jeder Gleichung die unbekannte Größe, indem du den Logarithmus in eine Potenz umschreibst.

a) $\log_3 x = 4$
b) $\log_x 64 = 3$
c) $\log_2 x = -3$
d) $\log_x 5 = \frac{1}{2}$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Zusammenfassen

Fasse mit den Logarithmengesetzen zu einem Logarithmus zusammen und berechne

den Wert.

a) $\lg 4 + \lg 25$
b) $\log_2 12 - \log_2 3$
c) $3\log_5 2 + \log_5 \frac{25}{8}$
d) $2\log_3 6 - \log_3 4$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Aus bekannten Werten

Gegeben sind $\lg 2 \approx 0{,}301$ und $\lg 3 \approx 0{,}477$. Berechne daraus ohne Taschenrechner mit den Logarithmengesetzen, indem du die Zahl in Faktoren zerlegst.

a) $\lg 6$
b) $\lg 12$
c) $\lg 18$
d) $\lg 0{,}5$
e) $\lg 8$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Basiswechsel

Berechne mit dem Taschenrechner und der Formel $\log_b a = \frac{\lg a}{\lg b}$. Runde auf zwei Nachkommastellen.

a) $\log_2 10$
b) $\log_3 50$
c) $\log_5 0{,}2$
d) $\log_7 100$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Exponentialgleichungen

Löse die Gleichungen. Isoliere zuerst die Potenz, logarithmiere dann und runde auf zwei Nachkommastellen.

a) $2^x = 20$
b) $3^x = 100$
c) $1{,}05^x = 2$
d) $0{,}5^x = 0{,}1$
e) $5 \cdot 2^x = 80$

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Logarithmusgleichungen

Löse die Gleichungen und gib den Definitionsbereich an. Prüfe am Ende, ob die Lösungen im Definitionsbereich liegen.

a) $\log_2(x+3) = 5$
b) $\lg(2x) = 2$
c) $\log_3(x-1) = -1$
d) $\log_5(x^2) = 2$

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Der pH-Wert

Der pH-Wert einer Lösung ist $\mathrm{pH} = -\lg c$, wobei c die Konzentration der Wasserstoff-Ionen in mol/l ist.

Stoff	Konzentration c in mol/l	pH-Wert
Zitronensaft	10^{-2}	?
Milch	$3{,}2 \cdot 10^{-7}$	?
Regenwasser	?	5,6
Seifenlauge	?	10

a) Berechne die pH-Werte von Zitronensaft und Milch.
b) Berechne die Konzentrationen von Regenwasser (pH 5,6) und von Seifenlauge (pH 10).
c) Um welchen Faktor unterscheiden sich die Konzentrationen bei pH 3 und pH 5?
d) Ein pH-Wert von 7 ist neutral. Wie ändert sich die Konzentration, wenn der pH-Wert um 1 steigt?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Wie laut ist ein Konzert?

Der Schallpegel $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ wird in Dezibel (dB) angegeben, wobei I_0 die Hörschwelle ist.

Geräusch	Pegel in dB	Verhältnis I/I_0
Flüstern	30	?
Straßenverkehr	70	?
Konzert	110	?

a) Berechne in der Tabelle das Verhältnis I/I_0 für die drei Geräusche.
b) Um wie viele Dezibel steigt der Pegel, wenn sich die Intensität verdoppelt?
c) Zwei gleich laute Maschinen mit je 80 dB laufen gleichzeitig. Wie laut ist es dann?
d) Ein Kopfhörer erzeugt 100 dB. Wie viel mal so intensiv ist das wie bei 70 dB (Straße)?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Die Richterskala

Die freigesetzte Energie eines Erdbebens wächst mit der Magnitude M wie $E \sim 10^{1{,}5M}$. Ein Beben mit der Magnitude 6,8 ereignet sich in Südeuropa, ein schwächeres mit 5,4 einige Monate vorher.

a) Um welchen Faktor ist ein Beben der Stärke $M+1$ energiereicher als eines der Stärke M?
b) Um welchen Faktor übertrifft das Beben mit 6,8 das mit 5,4?
c) Wie viele Beben der Stärke 5,4 braucht man (energetisch), um ein Beben der Stärke 6,8 zu ersetzen?
d) Wie groß müsste die Magnitude sein, damit die Energie 1000-mal so groß ist wie bei Stärke 5?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Wann ist das Kapital so groß?

Berechne mit dem Logarithmus, wie lange ein Kapital zu festen Zinssätzen mit Zinseszins anlegt werden muss.

Aufgabe	Zinssatz	Gesucht
A	3 %	3000 € werden 4000 €
B	2,5 %	Verdopplung
C	4 %	Verdreifachung

a) A: Nach wie vielen Jahren werden aus 3000 € bei 3 % Zinsen 4000 €?
b) B: Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 2,5 %?
c) C: Nach wie vielen Jahren verdreifacht es sich bei 4 %?
d) Vergleiche B mit der 72er-Regel.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Altersbestimmung mit Kohlenstoff

Das Kohlenstoff-Isotop ^{14}C hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren. Archäologen bestimmen damit das Alter von Holzfunden. In einem Fund aus dem Wald ist nur noch ein Teil der ursprünglichen Menge vorhanden.

Fund	Rest des ursprünglichen ^{14}C
Balken A	25 %
Balken B	60 %
Balken C	10 %

a) Wie alt ist Balken A? Begründe ohne Taschenrechner.
b) Berechne das Alter von Balken B mit dem Logarithmus.
c) Berechne das Alter von Balken C.
d) Warum ist das Verfahren für Funde von nur 100 Jahren ungenau?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Das Brot schimmelt

Auf einem Brot breitet sich Schimmel aus. Am Montag bedeckt er 2 cm², drei Tage später 6,75 cm². Das Wachstum ist exponentiell.

a) Bestimme den Wachstumsfaktor pro Tag und die Funktion $A(t)$.
b) Nach wie vielen Tagen bedeckt der Schimmel 100 cm²?
c) Wie groß ist die Verdopplungszeit?
d) Die Brotscheibe hat eine Fläche von 150 cm². Nach wie vielen Tagen ist sie vollständig bedeckt?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Das Koffein

Eine Tasse Kaffee enthält etwa 100 mg Koffein. Der Körper baut Koffein mit einer Halbwertszeit von 5 Stunden ab. Eine Studentin trinkt um 8 Uhr zwei Tassen.

a) Wie viel Koffein ist um 18 Uhr noch im Körper?
b) Wann sind nur noch 25 mg vorhanden (ohne Rechner)?
c) Wann sind nur noch 10 mg vorhanden (mit Logarithmus)?
d) Sie möchte um 22 Uhr schlafen. Wie viel mg sind dann noch da?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die Weltbevölkerung

1950 lebten etwa 2,5 Milliarden Menschen auf der Erde, 2020 waren es etwa 7,8 Milliarden.

Jahr	Einwohner in Milliarden
1950	2,5
2020	7,8

a) Um welchen Faktor ist die Bevölkerung in 70 Jahren gewachsen?
b) Wie groß war die mittlere jährliche Wachstumsrate (Prozent pro Jahr)?
c) Wann würde die Bevölkerung bei einem Wachstum von 1,1 % pro Jahr ab 2020 die 10 Milliarden erreichen?
d) Warum darf man exponentielles Wachstum nicht beliebig lange in die Zukunft fortsetzen?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Zwei Banken im Vergleich

Lars will 5000 € anlegen und auf 8000 € anwachsen lassen. Bank A bietet 3 % Zinsen pro Jahr, jährlich verzinst. Bank B bietet monatlich 0,25 % Zinsen, jeden Monat verzinst.

Bank	Zinssatz	Zeitraum der Verzinsung
A	3 %	ein Jahr
B	0,25 %	ein Monat

a) Berechne den Jahresfaktor von Bank B und vergleiche mit Bank A.
b) Wie lange dauert es bei Bank A, bis das Ziel erreicht ist?
c) Wie lange dauert es bei Bank B (in Monaten und in Jahren)?
d) Welche Bank ist besser? Begründe in einem Satz.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Die Tonleiter

Beim Klavier ist der Frequenzfaktor für einen Halbton gleich $q = 2^{1/12}$. Nach 12 Halbtönen (einer Oktave) hat sich die Frequenz verdoppelt. Der Kammerton a hat 440 Hz.

Intervall	Halbtöne	Frequenzfaktor
Halbton	1	?
Quinte	7	?
Oktave	12	?

a) Berechne den Frequenzfaktor für einen Halbton, eine Quinte (7 Halbtöne) und die Oktave.
b) Wie hoch ist der Ton, der eine Quinte über dem a liegt?
c) Wie viele Halbtöne liegen zwischen 440 Hz und 1000 Hz? Löse mit dem Logarithmus.
d) Erkläre, warum das menschliche Ohr Töne logarithmisch wahrnimmt.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Zwei Videokanäle im Wettlauf

Der Kanal A startet mit 5 Followern und wächst jede Woche um 20 %. Der Kanal B startet mit 2 Followern und wächst jede Woche um 50 %. Beide Zahlen sind als exponentielles Wachstum modelliert.

Kanal	Start	Wachstum pro Woche
A	5	+20 %
B	2	+50 %

a) Stelle die Funktionen $A(t)$ und $B(t)$ auf.
b) Nach wie vielen Wochen hat A mehr als 800 Follower, nach wie vielen B?
c) Nach wie vielen Wochen überholt B den Kanal A? Löse $5 \cdot 1{,}2^t = 2 \cdot 1{,}5^t$ mit dem Logarithmus.
d) Erkläre, warum B langfristig immer vorne liegt, obwohl A mehr Follower am Anfang hat.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Gleichungen für Fortgeschrittene

Löse die Gleichungen. Du brauchst Substitution, Potenzgesetze oder die Logarithmengesetze. Prüfe jeweils den Definitionsbereich.

a) $2^{x+1} + 2^x = 24$
b) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$
c) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$
d) $\lg(x+1) - \lg(x-1) = 1$