Lösungen - Logarithmen

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) $2^3 = 8$: 3; $3^4 = 81$: 4; $5^2 = 25$: 2; $10^3 = 1000$: 3; $7^0 = 1$: 0; $9^{0{,}5} = 3$: $0{,}5$. Der Logarithmus $\log_b a$ ist der Exponent, mit dem man die Basis b potenzieren muss, um a zu erhalten. Bei $\log_9 3$ hilft $\sqrt{9} = 3$, also der Exponent $\frac{1}{2}$.
b) $2^{-2} = \frac{1}{4}$: -2; $10^{-2} = 0{,}01$: -2; $10^0 = 1$: 0. Ist der Numerus kleiner als 1, wird der Logarithmus negativ (für eine Basis größer als 1); bei Numerus 1 ist er immer 0.
c) Eine positive Basis hoch irgendeinem Exponenten ist immer positiv. Deshalb kann der Numerus nie negativ sein. Deshalb ist der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert; auch $\log_b 0$ gibt es nicht.

Lösung zu Aufgabe 2

Es gilt immer: $b^x = a$ bedeutet dasselbe wie $x = \log_b a$. Die Basis bleibt Basis, der Exponent wird zum Logarithmus.
a) $\log_2 32 = 5$. Basis 2, Exponent 5, Ergebnis 32.
b) $\lg 0{,}001 = -3$. Bei Basis 10 schreibt man kurz $\lg$.
c) $x = \log_3 7$. Den unbekannten Exponenten kann man so als Logarithmus angeben; gerundet ist $x \approx 1{,}77$.
d) $4^3 = 64$. Probe: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
e) $5^{-2} = x$, also $x = \frac{1}{25}$. Ein negativer Exponent bedeutet den Kehrwert.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $x = 3^4 = 81$. Man schreibt die Gleichung als Potenz: Die Basis 3 hoch 4 ergibt x.
b) $x^3 = 64$, also $x = 4$. Hier ist die Basis gesucht; man zieht die dritte Wurzel aus 64.
c) $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$. Der negative Exponent liefert einen Bruch.
d) $x^{1/2} = 5$, also $x = 25$. Exponent $\frac{1}{2}$ bedeutet Quadratwurzel; man quadriert beide Seiten.

Lösung zu Aufgabe 4

Es gelten $\log a + \log b = \log(ab)$, $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$ und $r \cdot \log a = \log a^r$. Ziel ist jeweils ein Numerus, der eine Potenz der Basis ist.
a) $\lg 100 = 2$. Das Produkt $4 \cdot 25 = 100 = 10^2$.
b) $\log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$. Der Quotient ist $4 = 2^2$.
c) $\log_5 8 + \log_5 \frac{25}{8} = \log_5 25 = 2$. Zuerst wird $3 \log_5 2 = \log_5 2^3 = \log_5 8$ umgeschrieben; dann kürzt sich die 8.
d) $\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 9 = 2$. Zuerst $2 \log_3 6 = \log_3 36$, dann der Quotient $36 : 4 = 9 = 3^2$.

Lösung zu Aufgabe 5

Man zerlegt jede Zahl in Faktoren 2 und 3 und wendet die Gesetze an: Produkte werden zu Summen, Potenzen zu Vielfachen.
a) $\lg 6 = \lg 2 + \lg 3 \approx 0{,}778$. $6 = 2 \cdot 3$.
b) $\lg 12 = 2\lg 2 + \lg 3 \approx 1{,}079$. $12 = 2^2 \cdot 3$, also $2 \cdot 0{,}301 + 0{,}477$.
c) $\lg 18 = \lg 2 + 2\lg 3 \approx 1{,}255$. $18 = 2 \cdot 3^2$, also $0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477$.
d) $\lg 0{,}5 = \lg 2^{-1} = -\lg 2 \approx -0{,}301$. $0{,}5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$; das Ergebnis ist negativ, weil der Numerus kleiner als 1 ist.
e) $\lg 8 = 3\lg 2 \approx 0{,}903$. $8 = 2^3$.

Lösung zu Aufgabe 6

Der Taschenrechner kennt meist nur $\lg$ und $\ln$; mit dem Basiswechsel teilt man den Logarithmus des Numerus durch den Logarithmus der Basis.
a) $\frac{\lg 10}{\lg 2} = \frac{1}{0{,}301} \approx 3{,}32$. Kontrolle: $2^{3{,}32} \approx 10$.
b) $\frac{\lg 50}{\lg 3} \approx 3{,}56$. Kontrolle: $3^{3{,}56} \approx 50$.
c) $\frac{\lg 0{,}2}{\lg 5} = -1{,}00$ (genau -1, denn $5^{-1} = 0{,}2$).
d) $\frac{\lg 100}{\lg 7} = \frac{2}{0{,}845} \approx 2{,}37$. Kontrolle: $7^2 = 49$ und $7^{2{,}37} \approx 100$.

Lösung zu Aufgabe 7

Bei einer Exponentialgleichung steht die Unbekannte im Exponenten. Man isoliert die Potenz, logarithmiert beide Seiten und nutzt $\lg b^x = x \lg b$.
a) $x = \frac{\lg 20}{\lg 2} \approx 4{,}32$. Kontrolle: $2^4 = 16$.
b) $x = \frac{\lg 100}{\lg 3} = \frac{2}{\lg 3} \approx 4{,}19$. Kontrolle: $3^4 = 81$ liegt knapp unter 100.
c) $x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} \approx 14{,}21$. Bei 5 % Wachstum verdoppelt sich ein Wert also nach gut 14 Zeitschritten.
d) $x = \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}5} = \frac{-1}{-0{,}301} \approx 3{,}32$. Beide Logarithmen sind negativ, der Quotient ist positiv.
e) $2^x = 16$, also $x = 4$ (ohne Rechner, denn $2^4 = 16$). Zuerst wird durch 5 geteilt, um die Potenz zu isolieren.

Lösung zu Aufgabe 8

Der Numerus muss positiv sein; daraus ergibt sich jeweils der Definitionsbereich. Danach schreibt man die Gleichung als Potenz.
a) $x > -3$; $x + 3 = 2^5 = 32$, $x = 29$. Probe: $\log_2 32 = 5$; $x = 29$ liegt im Definitionsbereich.
b) $x > 0$; $2x = 10^2 = 100$, $x = 50$. Probe: $\lg 100 = 2$.
c) $x > 1$; $x - 1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, $x = \frac{4}{3}$. $\frac{4}{3} > 1$, die Lösung ist zulässig.
d) $x \neq 0$; $x^2 = 25$, also $x = 5$ oder $x = -5$. Beide Lösungen sind zulässig, denn $x^2 > 0$. Der Numerus x^2 ist für $x = \pm 5$ positiv.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Zitronensaft: $-\lg 10^{-2} = 2$. Milch: $-\lg(3{,}2 \cdot 10^{-7}) \approx 6{,}49$. Man setzt die Konzentration ein; bei einer Zehnerpotenz ist der pH-Wert einfach der Exponent ohne Minuszeichen.
b) $c = 10^{-5{,}6} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ mol/l; $c = 10^{-10}$ mol/l. Man stellt um: $c = 10^{-\mathrm{pH}}$.
c) $\frac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^2 = 100$: Bei pH 3 ist die Konzentration 100-mal so groß. Zwei pH-Einheiten Unterschied bedeuten den Faktor 10^2.
d) Sie wird auf ein Zehntel verkleinert. Jede pH-Stufe mehr bedeutet ein Zehntel der Konzentration.

Lösung zu Aufgabe 10

a) $\frac{I}{I_0} = 10^{L/10}$: Flüstern $10^3 = 1000$; Verkehr $10^7 = 10\,000\,000$; Konzert 10^{11}. Man stellt die Formel nach dem Verhältnis um: durch 10 teilen und dann 10 hoch nehmen.
b) $10 \cdot \lg 2 \approx 3{,}0$ dB, also etwa 3 dB. Eine doppelte Intensität erhöht den Pegel um $10 \cdot \lg 2$.
c) Doppelte Intensität: $80 + 3 \approx 83$ dB (nicht 160 dB). Zwei gleich laute Quellen ergeben nicht den doppelten Pegel, sondern nur 3 dB mehr.
d) Differenz 30 dB entspricht dem Faktor $10^3 = 1000$. Ein Unterschied von 10 dB bedeutet den Faktor 10, von 30 dB also den Faktor 1000.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $10^{1{,}5} \approx 31{,}6$. Eine Magnitude mehr bedeutet den Energiefaktor $10^{1{,}5}$.
b) Differenz 1,4: $10^{1{,}5 \cdot 1{,}4} = 10^{2{,}1} \approx 125{,}9$. Man setzt die Differenz der Magnituden in den Exponenten ein.
c) Etwa 126 Beben der Stärke 5,4. Das starke Beben setzt so viel Energie frei wie etwa 126 der schwächeren.
d) $10^{1{,}5\Delta M} = 1000$, also $1{,}5\Delta M = 3$ und $\Delta M = 2$. Magnitude 7. Man logarithmiert: $1{,}5\Delta M = \lg 1000 = 3$.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $1{,}03^n = \frac{4}{3}$: $n = \frac{\lg(4/3)}{\lg 1{,}03} \approx 9{,}73$ Jahre. Man teilt durch das Anfangskapital: $\frac{4000}{3000} = \frac{4}{3}$, dann logarithmiert man. Antwort: knapp 10 Jahre.
b) $n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}025} \approx 28{,}07$ Jahre. Verdopplung bedeutet $1{,}025^n = 2$.
c) $n = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}04} \approx 28{,}01$ Jahre. Verdreifachung bedeutet $1{,}04^n = 3$.
d) Faustregel: $\frac{72}{2{,}5} = 28{,}8$ Jahre, genau 28,07 Jahre. Die Faustregel ist eine gute Näherung. Die 72er-Regel liefert schnell einen guten Schätzwert.

Lösung zu Aufgabe 13

a) 25 % sind zwei Halbierungen: $2 \cdot 5730 = 11\,460$ Jahre. Nach jeder Halbwertszeit

halbiert sich die Menge; 25 % ist ein Viertel.
b) $0{,}5^{t/5730} = 0{,}6$: $t = 5730 \cdot \frac{\lg 0{,}6}{\lg 0{,}5} \approx 4223$ Jahre. Man setzt den vorhandenen Anteil ein und löst die Exponentialgleichung mit dem Logarithmus. Antwort: Der Fund ist etwa 4200 Jahre alt.
c) $t = 5730 \cdot \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}5} \approx 19\,035$ Jahre. Bei nur noch 10 % ist das Holz etwa 19000 Jahre alt.
d) Nach 100 Jahren sind noch $0{,}5^{100/5730} \approx 98{,}8\,\%$ vorhanden, die Abnahme ist kleiner als die Messungenauigkeit. Deshalb eignet sich die Methode nicht für sehr junge Funde.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $b^3 = \frac{6{,}75}{2} = 3{,}375$, also $b = 1{,}5$. $A(t) = 2 \cdot 1{,}5^t$. In drei Tagen wird dreimal mit b multipliziert; man zieht die dritte Wurzel.
b) $2 \cdot 1{,}5^t = 100$, $1{,}5^t = 50$: $t = \frac{\lg 50}{\lg 1{,}5} \approx 9{,}65$ Tage. Man teilt durch 2 und logarithmiert. Antwort: Nach knapp 10 Tagen bedeckt der Schimmel 100 cm².
c) $t = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}5} \approx 1{,}71$ Tage. Die Verdopplungszeit erhält man aus $1{,}5^t = 2$.
d) $1{,}5^t = 75$: $t = \frac{\lg 75}{\lg 1{,}5} \approx 10{,}65$, also nach etwa 10,6 Tagen. Man geht genauso vor wie in b).

Lösung zu Aufgabe 15

a) 10 h sind zwei Halbwertszeiten: $200 \cdot 0{,}25 = 50$ mg. Zwei Tassen sind 200 mg; von 8 bis 18 Uhr vergehen 10 Stunden.
b) 200 mg → 100 → 50 → 25: drei Halbierungen, also nach 15 Stunden (23 Uhr). Man halbiert so lange, bis 25 mg erreicht sind.
c) $200 \cdot 0{,}5^{t/5} = 10$, $0{,}5^{t/5} = 0{,}05$: $t = 5 \cdot \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}5} \approx 21{,}6$ h, also ungefähr 21,6 Stunden. Hier ist die Zeit keine ganze Zahl von Halbwertszeiten, deshalb braucht man den Logarithmus.
d) 14 h: $200 \cdot 0{,}5^{2{,}8} \approx 28{,}7$ mg. 14 Stunden sind 2,8 Halbwertszeiten.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $\frac{7{,}8}{2{,}5} = 3{,}12$. Faktor gleich Endwert durch Anfangswert.
b) $q = 3{,}12^{1/70} \approx 1{,}0164$, also etwa $1{,}64\,\%$ pro Jahr. In 70 Jahren wird 70-mal mit q multipliziert; man zieht die 70. Wurzel.
c) $7{,}8 \cdot 1{,}011^t = 10$: $t = \frac{\lg(10/7{,}8)}{\lg 1{,}011} \approx 22{,}7$ Jahre, also um 2043. Man rechnet mit der angegebenen niedrigeren Wachstumsrate weiter und löst mit dem Logarithmus.
d) Ressourcen wie Nahrung, Wasser und Platz sind begrenzt. Tatsächlich ist die Wachstumsrate in den letzten Jahrzehnten gesunken. Ein exponentielles Modell gilt deshalb nur für begrenzte Zeiträume.

Lösung zu Aufgabe 17

a) B: $1{,}0025^{12} \approx 1{,}0304$, also $3{,}04\,\%$ pro Jahr, A: $3\,\%$. Zwölf Monate mit je 0,25 %

ergeben den Jahresfaktor $1{,}0025^{12}$.
b) $1{,}03^n = 1{,}6$: $n = \frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}03} \approx 15{,}90$ Jahre. Das Kapital muss um den Faktor $\frac{8000}{5000} = 1{,}6$ wachsen.
c) $1{,}0025^m = 1{,}6$: $m = \frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}0025} \approx 188{,}2$ Monate, das sind etwa $15{,}7$ Jahre. Bei Bank B zählt man in Monaten und rechnet am Ende in Jahre um.
d) Bank B ist etwas besser, weil die Zinsen öfter mitverzinst werden. Der Unterschied ist aber gering. Lars erreicht bei Bank B sein Ziel etwa zwei Monate früher.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $2^{1/12} \approx 1{,}0595$; $2^{7/12} \approx 1{,}4983$; $2^{12/12} = 2$. Ein Intervall aus n Halbtönen hat den Faktor $2^{n/12}$.
b) $440 \cdot 2^{7/12} \approx 659{,}3$ Hz (der Ton e). Man multipliziert die Frequenz von a mit dem Faktor der Quinte.
c) $440 \cdot 2^{n/12} = 1000$: $n = 12 \cdot \log_2 \frac{1000}{440} = 12 \cdot \frac{\lg 2{,}273}{\lg 2} \approx 14{,}2$ Halbtöne. Man löst die Exponentialgleichung mit dem Basiswechsel.
d) Gleiche Tonschritte entsprechen gleichen Frequenzverhältnissen, nicht gleichen Frequenzdifferenzen. Das ist genau das Merkmal einer logarithmischen Skala. Deshalb klingt jede Oktave gleich groß, obwohl sich die Frequenz immer verdoppelt.

Lösung zu Aufgabe 19

a) $A(t) = 5 \cdot 1{,}2^t$, $B(t) = 2 \cdot 1{,}5^t$. Anfangswert mal Wachstumsfaktor hoch Anzahl der Wochen.
b) A: $1{,}2^t = 160$, $t = \frac{\lg 160}{\lg 1{,}2} \approx 27{,}8$. B: $1{,}5^t = 400$, $t \approx 14{,}8$ Wochen. Man teilt durch den Anfangswert und logarithmiert. Kanal B erreicht 800 Follower fast doppelt so schnell.
c) $\frac{1{,}5^t}{1{,}2^t} = \frac{5}{2}$, also $1{,}25^t = 2{,}5$: $t = \frac{\lg 2{,}5}{\lg 1{,}25} \approx 4{,}11$ Wochen. Man setzt beide Funktionen gleich und fasst die Potenzen zu $1{,}25^t$ zusammen. Nach gut 4 Wochen überholt B den Kanal A.
d) B hat den größeren Wachstumsfaktor. Das Verhältnis $B(t) : A(t)$ wächst selbst exponentiell mit dem Faktor 1,25 pro Woche und wird irgendwann größer als jeder Anfangsvorsprung. Deshalb siegt bei exponentiellem Wachstum langfristig immer der größere Faktor.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $2 \cdot 2^x + 2^x = 3 \cdot 2^x = 24$, $2^x = 8$, $x = 3$. Man klammert 2^x aus, denn $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$.
b) Mit $z = 2^x$: $z^2 - 6z + 8 = 0$, $z = 2$ oder $z = 4$; also $x = 1$ oder $x = 2$. Weil $4^x = (2^x)^2$ ist, entsteht durch Substitution eine quadratische Gleichung.
c) Definitionsbereich $x > 2$. $\log_2(x(x-2)) = 3$, $x^2 - 2x = 8$, $x = 4$ oder $x = -2$. Nur $x = 4$ liegt im Definitionsbereich. Man fasst mit dem Produktgesetz zusammen und löst die quadratische Gleichung; die negative Lösung fällt weg.
d) Definitionsbereich $x > 1$. $\lg \frac{x+1}{x-1} = 1$, $\frac{x+1}{x-1} = 10$, $x + 1 = 10x - 10$, $x = \frac{11}{9} \approx 1{,}22$. Man fasst mit dem Quotientengesetz zusammen, schreibt als Zehnerpotenz und löst

die lineare Gleichung.