Lösungen zur Klassenarbeit - Ganzrationale Funktionen

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Man berechnet $f(-x) = -(-x)^3 + 4(-x) = x^3 - 4x = -(-x^3 + 4x) = -f(x)$. Damit ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung (1 P.). Erkennungszeichen: Im Term kommen nur ungerade Exponenten vor.
b) $f(x) = 0$: Ausklammern $-x(x^2 - 4) = 0$ und dritte binomische Formel $-x(x-2)(x+2) = 0$. Nullprodukt: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ (2 P.). Die Nullstellen liegen symmetrisch, passend zu a).
c) Das Verhalten im Unendlichen bestimmt der Summand mit dem höchsten Exponenten, hier $-x^3$. Grad 3 ist ungerade, der Leitkoeffizient -1 negativ: Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to -\infty$, für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$ (1 P.). Der Graph verläuft also von links oben nach rechts unten.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Die Gleichung $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ enthält nur x^4 und x^2; sie ist biquadratisch. Mit $z = x^2$ (also $x^4 = z^2$) entsteht $z^2 - 10z + 9 = 0$ (1 P.). pq-Formel mit $p = -10$, $q = 9$: $z = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4$, also $z_1 = 1$ und $z_2 = 9$ (1 P.).
b) Rücksubstitution: $x^2 = 1$ ergibt $x = \pm 1$, $x^2 = 9$ ergibt $x = \pm 3$ (2 P.). Da beide z-Werte positiv sind, liefert jeder zwei Lösungen. Wäre ein z negativ, gäbe es dafür keine reelle Lösung. Probe mit $x = 3$: $81 - 90 + 9 = 0$. Antwort: $L = \{-3; -1; 1; 3\}$, die Funktion hat vier Nullstellen.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Einsetzen von $x = 2$: $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$. Also ist 2 eine Nullstelle, und $(x - 2)$ ist ein Linearfaktor (1 P.).
b) Polynomdivision: $x^3 : x = x^2$; $x^2(x-2) = x^3 - 2x^2$ abziehen, Rest $-x^2 - 4x$. Dann $-x^2 : x = -x$; $-x(x-2) = -x^2 + 2x$ abziehen, Rest $-6x + 12$. Schließlich $-6x : x = -6$; $-6(x-2) = -6x + 12$, Rest 0. Ergebnis $x^2 - x - 6$ (2 P.).
c) Nullstellen des Quotienten mit der pq-Formel: $x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = 0{,}5 \pm 2{,}5$, also 3 und -2. Damit $f(x) = (x-2)(x-3)(x+2)$ (1 P.). Probe durch Ausmultiplizieren: $(x-2)(x^2 - x - 6) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, das ist wieder der Ausgangsterm. Antwort: Nullstellen -2, 2, 3.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Jede Nullstelle liefert einen Linearfaktor, eine doppelte Nullstelle einen quadrierten Faktor. Grad 3 ergibt sich aus $1 + 2$: $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$ (1 P.).

b) Der y-Achsenabschnitt ist $f(0) = a \cdot (0+1) \cdot (0-2)^2 = 4a$. Aus $4a = 8$ folgt $a = 2$ (1 P.).
c) $f(3) = 2 \cdot (3+1) \cdot (3-2)^2 = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$ (1 P.).
d) Ausmultipliziert beginnt der Term mit $2x^3$: Grad 3 ungerade, Leitkoeffizient positiv. Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$, für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$ (1 P.). Bei $x = 2$ berührt der Graph die x-Achse nur, ohne sie zu schneiden, weil die Nullstelle doppelt ist. Antwort: $f(x) = 2(x+1)(x-2)^2$.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Nach dem Ausschneiden der Eckquadrate werden die Ränder hochgeklappt. Die Länge der Grundfläche verringert sich auf beiden Seiten um x, also $30 - 2x$; ebenso die Breite $20 - 2x$. Die Höhe ist x. Volumen gleich Länge mal Breite mal Höhe: $V(x) = x(30-2x)(20-2x)$ (1 P.).
b) $V(2) = 2 \cdot 26 \cdot 16 = 832$, $V(3) = 3 \cdot 24 \cdot 14 = 1008$, $V(4) = 4 \cdot 22 \cdot 12 = 1056$, $V(5) = 5 \cdot 20 \cdot 10 = 1000$, jeweils in cm^3 (1 P.).
c) Die Werte steigen bis $x = 4$ und fallen danach wieder; unter den ganzzahligen Höhen liefert $x = 4$ cm das größte Volumen von $1056\,\mathrm{cm}^3$ (1 P.).
d) Alle Kantenlängen müssen positiv sein: $x > 0$ und $20 - 2x > 0$, also $x < 10$. $D =]0;10[$ (1 P.).