Lernzettel - Ganzrationale Funktionen

Klasse: Klasse 10

Lineare Funktionen und Parabeln kennst du schon. Sie sind Sonderfälle der ganzrationalen Funktionen, mit denen sich Kurven mit mehreren Hoch- und Tiefpunkten beschreiben lassen.

Einstieg: Brücken, Schachteln und Gewinne

Der Bogen einer Brücke, die Flugbahn eines Balls, das Volumen einer Faltschachtel und der Gewinn eines Schulkiosks haben etwas gemeinsam: Man beschreibt sie mit Funktionen, deren Terme nur aus Potenzen von x mit natürlichen Hochzahlen bestehen, zum Beispiel $f(x) = -0{,}25x^2 + 4$ oder $V(x) = x(24 - 2x)^2$. Solche Funktionen heißen **ganzrationale Funktionen** oder Polynomfunktionen. Mit ihnen lassen sich Hoch- und Tiefpunkte, Nullstellen und Verläufe beschreiben, und du lernst in diesem Kapitel, wie du mit Ausklammern, Substitution und Polynomdivision die Nullstellen findest.

Ganzrationale Funktionen

Definition: ganzrationale Funktion

Eine **ganzrationale Funktion** (Polynomfunktion) ist eine Summe von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

Die höchste Hochzahl n heißt **Grad**, a_n der **Leitkoeffizient** und a_0 das **absolute Glied**.

Hinweis

$f(x) = 3x^4 - 2x + 1$ hat den Grad 4 und den Leitkoeffizienten 3. Keine ganzrationalen Funktionen sind $\frac{2}{x}$ oder $\sqrt{x} + 1$, denn dort kommen negative oder gebrochene Exponenten vor.

Satz: Verhalten für große Werte von x

Für sehr große $|x|$ bestimmt allein der Term mit der höchsten Potenz den Verlauf.

- Gerader Grad, $a_n > 0$: links und rechts nach oben (wie x^2). Bei a_n: links und rechts nach unten.
- Ungerader Grad, $a_n > 0$: von links unten nach rechts oben (wie x^3). Bei a_n umgekehrt.

Satz: Symmetrie

Nur **gerade Exponenten** (z. B. $x^4 - 3x^2 + 1$): $f(-x) = f(x)$, der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Nur **ungerade Exponenten** (z. B. $x^3 - x$): $f(-x) = -f(x)$, der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Bei gemischten Exponenten wie $x^2 + x$ liegt keine einfache Symmetrie vor.

Nullstellen berechnen

Definition: Nullstelle

Eine **Nullstelle** ist ein x-Wert mit $f(x) = 0$. Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

So gehst du vor: Nullstellen finden

1. Gibt es kein absolutes Glied, klammere x aus. Verwende den **Satz vom Nullprodukt**: Ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist.
2. Gibt es nur gerade Hochzahlen, setze $z = x^2$ (**Substitution**), löse und kehre mit $x = \pm\sqrt{z}$ zurück.
3. Sonst rate eine Nullstelle (kleine ganze Teiler des absoluten Gliedes), teile durch $(x - x_0)$ mit der **Polynomdivision** und löse den Rest.
4. Mache die Probe durch Einsetzen.

Beispiel 1: Ausklammern

Löse $x^3 - 4x = 0$.

$x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2) = 0$. Die Nullstellen sind 0, 2 und -2.

Beispiel 2: Substitution

Löse $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Setze $z = x^2$: $z^2 - 5z + 4 = 0$ mit $z_1 = 1$ und $z_2 = 4$.

Rücksubstitution: $x^2 = 1$ liefert $x = \pm 1$, $x^2 = 4$ liefert $x = \pm 2$. Vier Nullstellen: $-2, -1, 1, 2$. Ist ein z negativ, gibt es dazu keine Lösung.

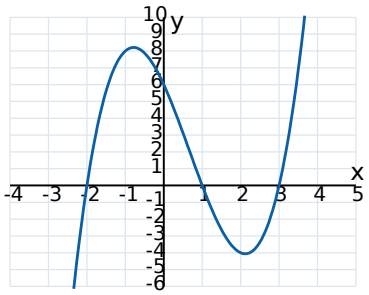
Beispiel 3: Raten und Polynomdivision

Löse $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Probiere Teiler von 6: $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$. Also ist $x = 1$ eine Nullstelle.

Polynomdivision: $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$. Aus $x^2 - x - 6 = 0$ folgen $x = 3$ und $x = -2$.

Linearfaktorform: $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$.



Graph von $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ mit den Nullstellen -2, 1 und 3.

Der Verlauf des Graphen und der Grad

Der Grad einer ganzrationalen Funktion bestimmt, wie viele Nullstellen sie höchstens hat und wie sie sich für große Beträge von x verhält. Eine Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen und kann bis zu $n-1$ Hoch- und Tiefpunkte besitzen. Für sehr große $|x|$ dominiert die höchste Potenz, alle anderen Summanden fallen kaum ins Gewicht. Deshalb genügt ein Blick auf Grad und Vorzeichen des Leitkoeffizienten. Bei geradem Grad zeigen beide Enden des Graphen in dieselbe Richtung, bei ungeradem Grad in entgegengesetzte Richtungen. Das hilft dir, jede Skizze zu kontrollieren.

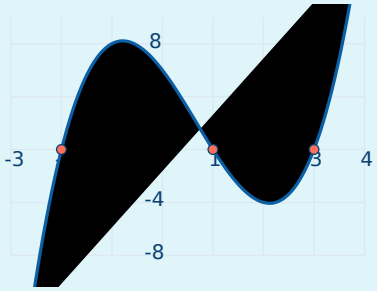
Grad	Leitkoeffizient $a_n > 0$	Leitkoeffizient a_n
gerade	von links oben nach rechts oben	von links unten nach rechts unten
ungerade	von links unten nach rechts oben	von links oben nach rechts unten

Nullstellen mit Polynomdivision

Wenn Ausklammern und Substitution nicht möglich sind, hilft das Raten einer Nullstelle. Probiere die positiven und negativen Teiler des absoluten Glieds. Hat f die Nullstelle x_1, so lässt sich $f(x)$ ohne Rest durch $(x - x_1)$ teilen. Das Ergebnis hat einen um 1 kleineren Grad, und seine Nullstellen sind die übrigen Nullstellen von f.

Beispiel 7: Polynomdivision Schritt für Schritt

Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.



Die Teiler von 6 sind $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Wir probieren: $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$. Also ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle. Jetzt teilen wir: $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$. Erster Schritt:

$x^3 : x = x^2$; zurückmultipliziert $x^3 - x^2$; Rest $-x^2 - 5x$. Zweiter Schritt: $-x^2 : x = -x$; zurückmultipliziert $-x^2 + x$; Rest $-6x + 6$. Dritter Schritt: $-6x : x = -6$; zurückmultipliziert $-6x + 6$; Rest 0. Das Ergebnis ist $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Die Nullstellen sind also -2, 1 und 3. Die Zerlegung lautet $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$, und jede Zerlegung kannst du durch Ausmultiplizieren kontrollieren.

Beispiel 8: Berührpunkt oder Schnittpunkt?

Untersuche $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$ auf Nullstellen und Verhalten an den Nullstellen.

Die Nullstellen sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Der Faktor $(x + 1)$ kommt zweimal vor, deshalb ist -1 eine doppelte Nullstelle: Dort berührt der Graph die x-Achse und wechselt das Vorzeichen nicht. Der Faktor $(x - 2)$ kommt nur einmal vor. Bei $x = 2$ schneidet der Graph die x-Achse und wechselt von negativ nach positiv. Der y-Achsenabschnitt ist $f(0) = 1 \cdot (-2) = -2$. Der Grad ist 3 und der Leitkoeffizient positiv, also kommt der Graph von links unten und läuft nach rechts oben.

Achtung: Typische Fehler bei Nullstellen

Erstens: Bei der Substitution $z = x^2$ ist man erst fertig, wenn man zurückgesetzt hat. Aus $z = 4$ folgt $x = 2$ und $x = -2$; aus $z = -3$ folgt keine Lösung. Zweitens: Beim Ausklammern darf man nicht durch x teilen, denn man würde die Nullstelle $x = 0$ verlieren. Drittens: Eine Funktion vom Grad n hat *höchstens* n Nullstellen, aber nicht immer so viele. Viertens: Beim Ansatz $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots$ muss der Faktor a mit einem weiteren Punkt bestimmt werden, sonst passt der Graph nur zu den Nullstellen, nicht zur Aufgabe.

Funktionsgleichungen aus Punkten bestimmen

Häufig sind Punkte des Graphen bekannt, und die Funktionsgleichung ist gesucht. Der Ansatz hängt davon ab, was gegeben ist. Kennst du die Nullstellen, wählst du die Produktform mit unbekanntem Faktor a. Kennst du nur Punkte, setzt du sie in einen allgemeinen Ansatz wie $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein und löst das entstehende lineare Gleichungssystem.

Beispiel 9: Parabel durch drei Punkte

Eine Parabel geht durch $A(0|3)$, $B(1|6)$ und $C(2|13)$. Bestimme die Gleichung.

Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aus A folgt $c = 3$. Aus B folgt $a + b + 3 = 6$, also $a + b = 3$. Aus C folgt $4a + 2b + 3 = 13$, also $2a + b = 5$. Subtrahiert man die beiden Gleichungen, erhält man $a = 2$ und damit $b = 1$. Die Gleichung lautet $f(x) = 2x^2 + x + 3$. Probe mit C: $2 \cdot 4 + 2 + 3 = 13$. Das stimmt.

So gehst du vor: Eine Funktion untersuchen

1. Bestimme Grad und Leitkoeffizienten und beschreibe das Verhalten für $x \to \pm\infty$.
2. Prüfe auf Symmetrie: $f(-x) = f(x)$ (achsensymmetrisch zur y-Achse) oder $f(-x) = -f(x)$ (punktsymmetrisch zum Ursprung).
3. Berechne den y-Achsenabschnitt $f(0)$.
4. Berechne die Nullstellen mit Ausklammern, Substitution oder Polynomdivision und notiere ihre Vielfachheit.
5. Lege eine Wertetabelle an und skizziere den Graphen so, dass Verhalten, Nullstellen und Symmetrie stimmen.

Wusstest du? Die Grenze der Formeln

Für Gleichungen zweiten Grades kennst du die pq-Formel. Für Gleichungen dritten und vierten Grades fanden italienische Mathematiker im 16. Jahrhundert, unter ihnen Gerolamo Cardano, komplizierte Lösungsformeln. Für Gleichungen vom Grad 5 und höher bewiesen Niels Henrik Abel und Paolo Ruffini im frühen 19. Jahrhundert, dass es keine allgemeine Formel mit den Grundrechenarten und Wurzeln gibt. Deshalb bleibt es in der Praxis beim Raten, bei der Polynomdivision und bei Näherungsverfahren des Taschenrechners.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Eine ganzrationale Funktion hat die Form $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$; n ist der Grad, a_n der Leitkoeffizient, $a_0 = f(0)$ der y-Achsenabschnitt.
- Für $x \to \pm\infty$ entscheidet der Summand mit der höchsten Potenz über das Verhalten (Grad gerade oder ungerade, Vorzeichen von a_n).
- Nur gerade Hochzahlen: achsensymmetrisch zur y-Achse; nur ungerade Hochzahlen: punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Nullstellen findest du durch Ausklammern, Substitution $z = x^2$ (bei x^4, x^2) oder Raten und Polynomdivision.
- Ein Produkt ist null, wenn ein Faktor null ist. Eine doppelte Nullstelle ist ein Berührpunkt, eine einfache ein Schnittpunkt.
- Aus den Nullstellen folgt der Ansatz $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots$; den Faktor a bestimmst du mit einem weiteren Punkt.
- Eine Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen und höchstens $n - 1$ Extrempunkte.
- Bei Sachaufgaben (Volumen, Gewinn, Brücke) musst du den sinnvollen Definitionsbereich beachten.

Achtung

Aus $x^3 = 4x$ darfst du nicht durch x teilen, sonst verlierst du die Lösung $x = 0$. Bei der Substitution musst du die Rücksubstitution machen. Bei der Polynomdivision schreibst du auch Terme mit Koeffizient 0 mit.

Vielfachheit und Funktionsgleichung

Definition: mehrfache Nullstelle

Kommt ein Linearfaktor mehrfach vor, spricht man von einer **mehrfachen Nullstelle**. Bei $f(x) = (x-2)^2(x+1)$ ist $x = 2$ eine doppelte Nullstelle: Der Graph *berührt* die x-Achse nur und wechselt das Vorzeichen nicht. Bei einfachen Nullstellen (hier $x = -1$) schneidet der Graph die Achse mit Vorzeichenwechsel.

Satz: Funktionsgleichung aus Nullstellen

Sind die Nullstellen x_1, x_2, x_3 bekannt, gilt $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Den Faktor a bestimmst du mit einem weiteren Punkt. Zur Nullstelle $x = 3$ gehört $(x-3)$, nicht $(x+3)$.

Beispiel 4: Gleichung aufstellen

Eine Funktion hat die Nullstellen -1, 2, 4 und $f(0) = 8$. Wie lautet sie?

Ansatz: $f(x) = a(x+1)(x-2)(x-4)$. Mit $f(0) = a \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-4) = 8a = 8$ folgt $a = 1$.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$.

Beispiel 5: Volumen einer Schachtel

Aus einem Karton 30 cm mal 20 cm werden an den Ecken Quadrate der Seite x ausgeschnitten, die Ränder hochgeklappt. Wie groß ist das Volumen für $x = 4$?

$V(x) = x(30-2x)(20-2x)$ ist ein Polynom 3. Grades mit 0. Für $x = 4$: $4 \cdot 22 \cdot 12 = 1056\ \text{cm}^3$.

So gehst du vor: Graph skizzieren

1. Bestimme das Verhalten für große $|x|$ aus Grad und Leitkoeffizient.
2. Berechne den y-Achsenabschnitt $f(0)$.
3. Bestimme die Nullstellen und trage sie ein.
4. Verbinde alles mit einer glatten Kurve: Sie schneidet bei einfachen Nullstellen und berührt bei doppelten. Kontrolliere mit einer kleinen Wertetabelle.

Beispiel 6: Verlauf bestimmen

Beschreibe den Verlauf von $f(x) = -2x^5 + 3x^2 - 1$ für sehr große $|x|$ und gib die Symmetrie an.

Der Grad 5 ist ungerade, der Leitkoeffizient -2 ist negativ. Der Graph kommt von links oben und geht nach rechts unten.

Es kommen gerade (x^2, -1) und ungerade Exponenten (x^5) vor. Deshalb gibt es keine einfache Symmetrie zur y-Achse oder zum Ursprung.

Hinweis

Ganzrationale Funktionen sind Summen von Potenzfunktionen. Der Grad gibt die höchste Anzahl von Nullstellen an, der Leitkoeffizient den Verlauf am Rand. Aus den Nullstellen lässt sich umgekehrt die Linearfaktorform und damit die Funktionsgleichung aufstellen.

Ottos Tipp

Erst ausklammern, dann überlegen! Ist kein absolutes Glied da, klammere x aus. Sind nur gerade Hochzahlen da, hilft die Substitution $z = x^2$. Und zum Schluss prüfst du jede Nullstelle durch Einsetzen.