Arbeitsblatt - Ganzrationale Funktionen

Klasse: Klasse 10 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Grad, Leitkoeffizient, absolutes Glied

Bestimme für jede Funktion den Grad, den Leitkoeffizienten und das absolute Glied. Multipliziere dazu, wenn nötig, den Term aus.

Funktion	Grad	Leitkoeffizient	absolutes Glied
$f_1(x) = 3x^4 - 2x + 7$	?	?	?
$f_2(x) = -x^5 + x^3$	?	?	?
$f_3(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$	?	?	?
$f_4(x) = 2x(x^2 - 5)$	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle für f_1 und f_2.
b) Ergänze die Tabelle für f_3 und f_4.
c) Welche der Funktionen schneidet die y-Achse im Ursprung?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Verhalten im Unendlichen

Beschreibe jeweils, wie sich der Graph für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ verhält. Begründe mit Grad und Leitkoeffizient.

a) $f(x) = x^3 - 4x$
b) $g(x) = -2x^4 + x^2$
c) $h(x) = -x^3 + 5$
d) $k(x) = 0{,}5x^6 - x^5$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Symmetrie prüfen

Untersuche, ob der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung oder keines von beiden ist. Setze dazu $-x$ ein.

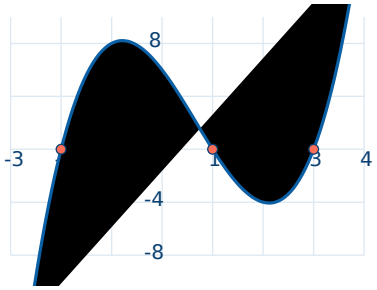
a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
b) $g(x) = x^3 - x$
c) $h(x) = x^3 + x^2$
d) $k(x) = x^5 - 2x^3 + x$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Wertetabelle und Nullstellen

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?	?



a) Berechne alle Funktionswerte der Tabelle.
b) Lies die Nullstellen aus der Tabelle ab und prüfe sie durch Einsetzen.
c) Zerlege $f(x)$ in Linearfaktoren und überprüfe die Zerlegung durch Ausmultiplizieren.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Ausklammern

Berechne die Nullstellen. Klammere zuerst die höchste gemeinsame Potenz von x aus und löse dann die verbleibende Gleichung.

a) $x^3 - 4x = 0$
b) $2x^4 - 8x^3 = 0$
c) $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$
d) $x^3 - 5x^2 = 0$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Substitution

Löse die biquadratischen Gleichungen mit der Substitution $z = x^2$ (bzw. $z = x^3$). Vergiss das Zurücksetzen nicht.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 6 = 0$
d) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ (mit $z = x^3$)

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Polynomdivision

Eine Nullstelle ist gegeben. Teile durch den passenden Linearfaktor und bestimme die

restlichen Nullstellen.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x_1 = 1$
b) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $x_1 = -1$
c) $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$, $x_1 = 3$

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Aus Nullstellen die Gleichung

Bestimme die Gleichung der ganzrationalen Funktion mit den angegebenen Nullstellen, die durch den Punkt P geht. Ansatz: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdots$.

a) Nullstellen -2, 1, 4; $P(0|-8)$
b) Nullstellen 0 (doppelt) und 3; $P(1|-4)$
c) Nullstellen -3, -1, 1, 3; $P(0|9)$

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Vielfachheit der Nullstellen

Bestimme alle Nullstellen mit Vielfachheit, den y-Achsenabschnitt und sage, an welchen Nullstellen der Graph die x-Achse berührt oder schneidet.

a) $f(x) = (x+1)^2(x-2)$
b) $g(x) = x(x-1)^3$
c) $h(x) = (x-2)^2(x+3)^2$

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die Faltschachtel

Aus einem quadratischen Karton mit der Kantenlänge 24 cm werden an den vier Ecken Quadrate der Seitenlänge x cm ausgeschnitten. Die überstehenden Seiten werden zu einer oben offenen Schachtel hochgefaltet.

x in cm	2	3	4	5	6
Volumen in cm³	?	?	?	?	?

a) Begründe, dass das Volumen $V(x) = x(24 - 2x)^2$ ist.
b) Berechne die Volumina der Tabelle.
c) Welche ganzzahlige Höhe x liefert das größte Volumen? Wie viel Liter fasst die Schachtel?
d) Welche Werte kann x annehmen (Definitionsbereich)?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Der Tunnel

Ein Straßentunnel hat im Querschnitt die Form einer Parabel $h(x) = -0{,}25x^2 + 4$ (x und h in Metern, $x = 0$ in der Tunnelmitte).

a) Wie hoch und wie breit ist der Tunnel?
b) Ein Lastwagen ist $2{,}55$ m breit und $3{,}5$ m hoch und fährt in der Mitte. Passt er hindurch? Begründe mit der Höhe am Rand des Lastwagens.
c) Ein Bus ist $3{,}2$ m hoch und 4 m breit. Passt er?
d) Bei welchem Abstand von der Mitte ist die Tunnelhöhe nur noch 2 m?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Der Gewinn des Schulkiosks

Der Schulkiosk berechnet den Tagesgewinn in Abhängigkeit von der Anzahl x verkaufter Brötchen mit $G(x) = -0{,}01x^2 + 1{,}2x - 20$ (in Euro).

a) Wie hoch ist der Gewinn, wenn kein Brötchen verkauft wird? Was bedeutet das Ergebnis?
b) Bei welchen Verkaufszahlen macht der Kiosk weder Gewinn noch Verlust?
c) Berechne den Gewinn bei 60 Brötchen und vergleiche mit 50 und 70.
d) Wie viele Brötchen müssen mindestens verkauft werden, damit der Kiosk Gewinn macht?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Die Achterbahn

Der erste Abschnitt einer Achterbahn wird durch das Höhenprofil $f(x) = 0{,}02x(x-10)(x-20) + 10$ beschrieben (x waagerechte Strecke in m, $f(x)$ Höhe in m, $0 \le x \le 20$).

a) Wie hoch liegen Start ($x = 0$) und Ende ($x = 20$)?
b) Berechne die Höhe bei $x = 5$ und bei $x = 15$.
c) An welchen Stellen hat die Bahn wieder genau die Höhe 10 m?
d) Beschreibe den Verlauf der Bahn in Worten (Berg und Tal).

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Der Quader mit Nachbarzahlen

Die Kanten eines Quaders haben die Längen x, $x+1$ und $x+2$ (in cm). Ein Modellbauer will einen Quader mit einem Volumen von genau 60 cm³ herstellen.

a) Stelle die Funktion $V(x)$ auf und multipliziere aus.
b) Berechne $V(2)$, $V(3)$ und $V(4)$.
c) Zeige durch Polynomdivision, dass $x = 3$ die einzige Lösung von $V(x) = 60$ ist.
d) Berechne für diese Lösung die Oberfläche des Quaders.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Der Springbrunnen

Das Wasser eines Springbrunnens beschreibt eine Parabel. Gemessen wurden drei

Punkte der Wasserlinie: Der Strahl beginnt im Ursprung, hat bei $x = 2$ m die Höhe 3 m und bei $x = 4$ m die Höhe 4 m.

x in m	0	2	4
Höhe in m	0	3	4

a) Bestimme $f(x) = ax^2 + bx$ aus den drei Punkten.
b) Wo erreicht das Wasser seine größte Höhe, wie groß ist sie?
c) In welcher Entfernung trifft der Strahl wieder auf das Wasser?
d) Wie hoch ist der Strahl 1 m vom Rand des Beckens entfernt ($x = 7$)?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Der Wanderweg

Das Höhenprofil eines Wanderwegs wird für $0 \le x \le 4$ (x in km, Höhe h in 100 m über dem Tal) durch $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ beschrieben.

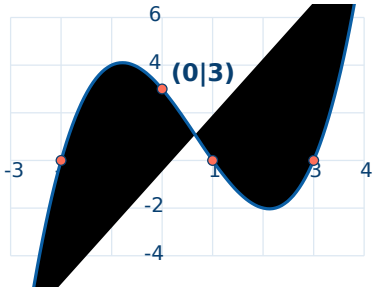
x	0	1	2	3	4
Höhe $h(x)$ in 100 m	?	?	?	?	?

a) Berechne die fünf Höhenwerte.
b) Zeige, dass $h(x) = 1$ für $x = 0$ und $x = 3$ gilt, und beschreibe das Verhalten bei $x = 3$.
c) Auf welcher Höhe liegt der höchste Punkt? Warum berührt der Weg dort die Höhe 5 und schneidet sie nicht?
d) Wann liegt der Weg wieder bei 5 (500 m)?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Gleichung aus dem Graphen

Der abgebildete Graph gehört zu einer ganzrationalen Funktion dritten Grades. Er schneidet die x-Achse bei -2, 1 und 3 und die y-Achse bei $(0|3)$.



x	-2	0	2
$f(x)$	0	3	-2

a) Stelle mit dem Ansatz für die Nullstellen die Funktionsgleichung auf und bestimme a.
b) Berechne $f(2)$ und vergleiche mit der Tabelle.
c) Beschreibe das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

d) Zwischen welchen Nullstellen ist $f(x) > 0$? Gib die Bereiche an.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Eine Kurvenschar

Gegeben sind die Funktionen $f_a(x) = x^3 - ax$ mit einem Parameter a. Untersuche, wie sich die Nullstellen mit a verändern.

a	-1	**0**	**1**	**4**	**9**
Nullstellen	?	?	?	?	?

a) Bestimme die Nullstellen für alle Werte der Tabelle.
b) Für welche a hat f_a genau eine, für welche drei Nullstellen?
c) Zeige, dass alle Graphen der Schar punktsymmetrisch zum Ursprung sind.
d) Für welches a liegt eine Nullstelle bei $x = 5$?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Der Sparplan

Jedes Jahr zu Jahresbeginn werden 1000 € auf ein Konto eingezahlt, drei Jahre lang. Der Zinsfaktor pro Jahr ist q. Das Kapital am Ende des dritten Jahres ist $K(q) = 1000\,(q + q^2 + q^3)$.

Zinsfaktor q	**1,02**	**1,03**	**1,04**
$K(q)$ in €	?	?	?

a) Erkläre, warum die erste Einzahlung mit q^3, die zweite mit q^2 und die dritte mit q multipliziert wird.
b) Berechne die Werte der Tabelle.
c) Eine Familie möchte nach 3 Jahren 3200 € haben. Zwischen welchen Zinsfaktoren aus der Tabelle liegt q? Bestimme q auf drei Nachkommastellen.
d) Welchem Zinssatz entspricht das?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Die vollständige Untersuchung

Untersuche $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ vollständig und zeichne eine Skizze.

a) Symmetrie, y-Achsenabschnitt und Verhalten im Unendlichen.
b) Nullstellen mit Substitution und Zerlegung in Linearfaktoren.
c) Berechne die Schnittpunkte mit der Geraden $y = 4$.
d) Wie viele Nullstellen kann eine Funktion vierten Grades haben? Nenne für jede Anzahl von 0 bis 4 ein Beispiel.