Lösungen - Ganzrationale Funktionen

Klasse: Klasse 10

Lösung zu Aufgabe 1

a) f_1: Grad 4, Leitkoeffizient 3, absolutes Glied 7. f_2: Grad 5, Leitkoeffizient -1, absolutes Glied 0. Der Grad ist die höchste Hochzahl, der Leitkoeffizient der Faktor davor, das absolute Glied der Summand ohne x.
b) $f_3(x) = (x^2 + x - 2)(x + 3) = x^3 + 4x^2 + x - 6$: Grad 3, Leitkoeffizient 1, absolutes Glied -6. $f_4(x) = 2x^3 - 10x$: Grad 3, Leitkoeffizient 2, absolutes Glied 0. Bei f_3 muss man zuerst ausmultiplizieren, weil man Grad und Koeffizienten in der Produktform nicht direkt sieht; das absolute Glied ist das Produkt $-2 \cdot 3$.
c) f_2 und f_4, denn dort ist das absolute Glied 0, also $f(0) = 0$. Ein Graph geht genau dann durch den Ursprung, wenn $f(0) = 0$ ist.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Ungerader Grad, $a_n = 1 > 0$: $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Für große $|x|$ bestimmt der Summand mit der höchsten Potenz das Verhalten; die übrigen Summanden fallen nicht ins Gewicht.
b) Gerader Grad, $a_n = -2$: $g(x) \to -\infty$ für beide Richtungen. Bei geradem Grad zeigen beide Enden in dieselbe Richtung; der negative Leitkoeffizient lässt sie nach unten zeigen.
c) Ungerader Grad, $a_n = -1$: $h(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$, $h(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$. Der negative Leitkoeffizient kehrt das Verhalten von x^3 um.
d) Gerader Grad, $a_n = 0{,}5 > 0$: $k(x) \to +\infty$ für beide Richtungen. Der Summand $-x^5$ ist für große $|x|$ unbedeutend gegenüber $0{,}5x^6$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) $f(-x) = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$: achsensymmetrisch. Nur gerade Hochzahlen: Das Vorzeichen von x verschwindet.
b) $g(-x) = -x^3 + x = -g(x)$: punktsymmetrisch. Nur ungerade Hochzahlen: Jeder Summand ändert sein Vorzeichen.
c) $h(-x) = -x^3 + x^2$. Das ist weder $h(x)$ noch $-h(x)$: keine Symmetrie (gemischte gerade und ungerade Hochzahlen). Weil gerade und ungerade Hochzahlen gemischt vorkommen, gibt es keine dieser Symmetrien.
d) $k(-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -k(x)$: punktsymmetrisch. Wieder nur ungerade Hochzahlen.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $f(-3) = -24$; $f(-2) = 0$; $f(-1) = 8$; $f(0) = 6$; $f(1) = 0$; $f(2) = -4$; $f(3) = 0$; $f(4) = 18$. Man setzt jeden Wert ein, zum Beispiel $f(-3) = -27 - 18 + 15 + 6 = -24$.
b) Nullstellen bei -2, 1 und 3, denn dort ist $f(x) = 0$. Zwischen den Nullstellen

wechselt der Funktionswert sein Vorzeichen.
c) $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$. Probe: $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$; $(x^2 + x - 2)(x-3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Jede Nullstelle x_0 liefert einen Linearfaktor $(x - x_0)$; der Leitkoeffizient ist 1.

Lösung zu Aufgabe 5

a) $x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) = 0$: $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$. Man klammert x aus und zerlegt mit der dritten binomischen Formel.
b) $2x^3(x - 4) = 0$: $x = 0$ (dreifach), $x = 4$. Man klammert $2x^3$ aus; eine Nullstelle mit Vielfachheit 3 ist ein Sattelpunkt auf der x-Achse.
c) $x(x^2 + 3x - 10) = x(x+5)(x-2) = 0$: $x = 0$, $x = -5$, $x = 2$. Man klammert x aus und löst die quadratische Gleichung mit der pq-Formel.
d) $x^2(x - 5) = 0$: $x = 0$ (doppelt), $x = 5$. Man klammert x^2 aus; bei der doppelten Nullstelle berührt der Graph die x-Achse.

Lösung zu Aufgabe 6

Bei einer biquadratischen Gleichung ersetzt man x^2 durch z, löst die quadratische Gleichung in z und zieht danach die Wurzel. Jedes positive z liefert zwei Lösungen $\pm\sqrt{z}$.
a) $z^2 - 5z + 4 = 0$: $z = 1$ oder $z = 4$; also $x = \pm 1$ oder $x = \pm 2$. Probe für $x = 2$: $16 - 20 + 4 = 0$.
b) $z^2 - 13z + 36 = 0$: $z = 4$ oder $z = 9$; also $x = \pm 2$ oder $x = \pm 3$. Vier Lösungen, symmetrisch zu 0.
c) $z^2 + z - 6 = 0$: $z = 2$ oder $z = -3$. Nur $z = 2$ liefert $x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$; $z = -3$ hat keine Lösung. Ein negatives z liefert keine reelle Lösung, weil x^2 nie negativ ist.
d) $z^2 - 9z + 8 = 0$: $z = 1$ oder $z = 8$; also $x = 1$ oder $x = 2$ (dritte Wurzel). Bei der dritten Wurzel gibt es nur eine reelle Lösung pro z.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Nullstellen: 1, 2, 3. Nach der Division bleibt eine quadratische Gleichung, die man faktorisiert oder mit der pq-Formel löst.
b) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. Nullstellen: -1, -3, 2. Man teilt durch $(x + 1)$, weil -1 eine Nullstelle ist.
c) $(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (x - 3) = 2x^2 + 3x - 2$. Mit der pq-Formel $x^2 + 1{,}5x - 1 = 0$ (): $x = -0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 + 1} = -0{,}75 \pm 1{,}25$, also $x = 0{,}5$ oder $x = -2$. Nullstellen: 3, $0{,}5$, -2. Vor der pq-Formel teilt man den Quotienten durch 2. Probe: $f(0{,}5) = 0{,}25 - 0{,}75 - 5{,}5 + 6 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $f(0) = a \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-4) = 8a = -8$, also $a = -1$. $f(x) = -(x+2)(x-1)(x-4)$. Man setzt die Nullstellen in den Ansatz ein und bestimmt a mit dem Punkt P.

b) $f(1) = a \cdot 1 \cdot (-2) = -2a = -4$, also $a = 2$. $f(x) = 2x^2(x-3)$. Die doppelte Nullstelle 0 liefert den Faktor x^2.
c) $f(x) = a(x^2-1)(x^2-9)$; $f(0) = 9a = 9$, also $a = 1$. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. Bei den Nullstellen ± 1 und ± 3 fasst man mit der dritten binomischen Formel zusammen.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Nullstellen: -1 (doppelt, berührt), 2 (einfach, schneidet). $f(0) = -2$. An einer Nullstelle gerader Vielfachheit berührt der Graph die Achse, bei ungerader schneidet er sie.
b) Nullstellen: 0 (einfach, schneidet), 1 (dreifach, schneidet mit Wendung). $g(0) = 0$. Bei dreifacher Nullstelle schneidet der Graph die Achse und ist dort waagerecht (Sattelpunkt).
c) Nullstellen: 2 (doppelt, berührt), -3 (doppelt, berührt). $h(0) = 4 \cdot 9 = 36$. Der Graph liegt immer oberhalb der x-Achse oder auf ihr (Quadrate). Ein Produkt von Quadraten ist nie negativ.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $24 - 2x$, die Höhe der Schachtel ist x. Also $V = x(24-2x)^2$. Nach dem Ausschneiden bleibt eine quadratische Grundfläche, die Laschen bilden die Höhe.
b) $V(2) = 800$; $V(3) = 972$; $V(4) = 1024$; $V(5) = 980$; $V(6) = 864$ (alle in cm³). Man setzt die Werte in $V(x)$ ein.
c) Das Maximum liegt bei $x = 4$: $V = 1024$ cm³ $\approx 1{,}02$ Liter. In der Tabelle ist $V(4)$ am größten. Antwort: Bei $x = 4$ cm fasst die Schachtel gut 1 Liter.
d) Es muss $x > 0$ und $24 - 2x > 0$ gelten, also 0. Für $x \geq 12$ bliebe keine Grundfläche übrig.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Höhe in der Mitte $h(0) = 4$ m. Nullstellen: $-0{,}25x^2 + 4 = 0$, $x^2 = 16$, $x = \pm 4$; Breite 8 m. Die Höhe ist der Scheitelwert, die Breite der Abstand der Nullstellen.
b) Der Rand liegt bei $x = 1{,}275$: $h(1{,}275) = -0{,}25 \cdot 1{,}275^2 + 4 \approx 3{,}594$ m $> 3{,}5$ m. Er passt. Der Lastwagen fährt mittig; an seinen Ecken muss der Tunnel höher als 3,5 m sein. Der Abstand ist mit 9 cm sehr knapp.
c) Rand bei $x = 2$: $h(2) = -1 + 4 = 3$ m m. Der Bus passt nicht. Bei einer Breite von 4 m liegen die Ecken bei $x = \pm 2$.
d) $-0{,}25x^2 + 4 = 2$, $x^2 = 8$, $x = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2{,}83$ m. Man setzt $h = 2$ und löst nach x auf.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $G(0) = -20$ €: Das sind die festen Kosten, die auch ohne Verkauf anfallen. Bei null verkauften Brötchen bleiben nur die Kosten.
b) $-0{,}01x^2 + 1{,}2x - 20 = 0$ ergibt $x^2 - 120x + 2000 = 0$,
$x = 60 \pm \sqrt{3600 - 2000} = 60 \pm 40$, also $x = 20$ oder $x = 100$. Man multipliziert mit

-100 und löst mit der pq-Formel; das sind die Gewinnschwellen.
c) $G(60) = 16{,}0$ €; $G(50) = 15{,}0$ €; $G(70) = 15{,}0$ €. Bei 60 Brötchen ist der Gewinn am größten. Der Scheitel liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen, also bei 60.
d) Zwischen den Nullstellen ist $G > 0$: ab 21 Brötchen macht der Kiosk Gewinn (genau bei 20 ist der Gewinn 0). Nur zwischen den Nullstellen liegt die nach unten geöffnete Parabel über der Achse.

Lösung zu Aufgabe 13

a) $f(0) = 10$ m und $f(20) = 0{,}02 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0 + 10 = 10$ m. Man setzt $x = 0$ und $x = 20$ ein; ein Faktor ist jeweils null.
b) $f(5) = 0{,}02 \cdot 5 \cdot (-5) \cdot (-15) + 10 = 17{,}5$ m; $f(15) = 0{,}02 \cdot 15 \cdot 5 \cdot (-5) + 10 = 2{,}5$ m. Man setzt die Werte ein und achtet auf die Vorzeichen der Klammern.
c) $0{,}02x(x-10)(x-20) = 0$ gilt für $x = 0$, $x = 10$ und $x = 20$. An diesen Stellen ist der Produktterm null, die Höhe also 10 m.
d) Die Bahn steigt von 10 m auf einen Hochpunkt (über 17 m bei etwa $x = 4$), fällt wieder auf 10 m bei $x = 10$ und weiter in ein Tal (unter 3 m bei etwa $x = 16$), danach steigt sie wieder auf 10 m. Die Werte aus b) zeigen den groben Verlauf zwischen den Stellen mit 10 m Höhe.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $V(x) = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x$. Man multipliziert schrittweise aus: $x(x^2 + 3x + 2)$.
b) $V(2) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $V(3) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$; $V(4) = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$. Man setzt die Werte ein.
c) $x^3 + 3x^2 + 2x - 60 = 0$. Teilen durch $(x-3)$:
$(x^3 + 3x^2 + 2x - 60) : (x-3) = x^2 + 6x + 20$. Die Gleichung $x^2 + 6x + 20 = 0$ hat die Diskriminante $36 - 80$ und keine Lösung. Also ist $x = 3$ die einzige. Man kennt die Lösung 3 aus b) und dividiert durch $(x-3)$. Antwort: Die Kanten sind 3 cm, 4 cm und 5 cm lang.
d) Kanten 3, 4, 5: $O = 2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = 2 \cdot 47 = 94$ cm². Die Oberfläche besteht aus drei Paaren gleicher Rechtecke.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Aus $P(2|3)$: $4a + 2b = 3$. Aus $Q(4|4)$: $16a + 4b = 4$. Doppelte erste Gleichung: $8a + 4b = 6$. Subtraktion: $8a = -2$, $a = -0{,}25$; $b = 2$. $f(x) = -0{,}25x^2 + 2x$. Da der Strahl im Ursprung beginnt, ist $c = 0$. Man setzt die beiden Punkte ein und löst das Gleichungssystem.
b) Scheitel bei $x = 4$ m, Höhe $f(4) = -4 + 8 = 4$ m. Man ergänzt quadratisch: $f(x) = -0{,}25(x-4)^2 + 4$.
c) $-0{,}25x^2 + 2x = 0$, $x(-0{,}25x + 2) = 0$: $x = 0$ oder $x = 8$. Der Strahl trifft nach 8 m auf. Man klammert x aus.
d) $f(7) = -0{,}25 \cdot 49 + 14 = 1{,}75$ m. Man setzt $x = 7$ ein.

Lösung zu Aufgabe 16

a) $h(0) = 1$; $h(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$; $h(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$; $h(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$; $h(4) = 64 - 96 + 36 + 1 = 5$. Man setzt die Werte ein.
b) $h(x) - 1 = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$. Bei $x = 0$ einfache, bei $x = 3$ doppelte Nullstelle: Dort berührt der Weg die Höhe 1 (Tal) und steigt danach wieder an. Man klammert x aus und erkennt die binomische Formel $(x-3)^2$.
c) Höchster Punkt bei $x = 1$ mit $h = 5$, also 500 m. Wegen $h(x) - 5 = (x-1)^2(x-4)$ ist $x = 1$ eine doppelte Stelle, der Graph berührt die Höhe 5 von unten. Man faktorisiert $h(x) - 5$; die doppelte Stelle zeigt einen Hochpunkt.
d) $h(x) = 5$ für $x = 1$ und $x = 4$. Am Ende bei $x = 4$ km liegt der Weg wieder auf 500 m. Man liest die Lösungen aus der Faktorisierung ab.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $f(x) = a(x+2)(x-1)(x-3)$; $f(0) = a \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-3) = 6a = 3$, also $a = 0{,}5$. Die drei Nullstellen liefern die Linearfaktoren; a folgt aus dem y-Achsenabschnitt.
b) $f(2) = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -2$. Das stimmt mit der Tabelle überein. Man setzt $x = 2$ ein.
c) Ungerader Grad, $a = 0{,}5 > 0$: links unten, rechts oben. Grad 3 und positiver Leitkoeffizient.
d) $f(x) > 0$ für -2 und für $x > 3$. Zwischen den Nullstellen wechselt das Vorzeichen; man liest es am Verhalten im Unendlichen ab.

Lösung zu Aufgabe 18

a) $f_a(x) = x(x^2 - a)$. $a = -1$: nur 0. $a = 0$: $x^3 = 0$, 0 (dreifach). $a = 1$: $0, \pm 1$. $a = 4$: $0, \pm 2$. $a = 9$: $0, \pm 3$. Man klammert x aus; $x^2 = a$ hat nur für $a > 0$ zwei Lösungen.
b) Genau eine Nullstelle für $a \leq 0$; drei Nullstellen für $a > 0$ (nämlich 0 und $\pm\sqrt{a}$). Für $a \leq 0$ hat $x^2 = a$ keine Lösung außer bei $a = 0$ die Lösung 0.
c) $f_a(-x) = -x^3 + ax = -f_a(x)$ für jedes a. Alle Summanden haben ungerade Hochzahlen, deshalb sind alle Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung.
d) $125 - 5a = 0$, also $a = 25$; dann sind die Nullstellen $0, \pm 5$. Man setzt $x = 5$ ein und löst nach a auf.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Die erste Einzahlung wird dreimal verzinst, die zweite zweimal, die dritte einmal. Der Grad 3 der Funktion entsteht aus den drei Verzinsungen. Je länger das Geld auf dem Konto liegt, desto öfter wird es verzinst.
b) $K(1{,}02) = 3121{,}61$; $K(1{,}03) = 3183{,}63$; $K(1{,}04) = 3246{,}46$ €. Man setzt die Zinsfaktoren ein.
c) $K(1{,}03) \approx 3183{,}6$. Mit Intervallschachtelung ergibt sich $q \approx 1{,}033$. Man probiert Werte zwischen 1,03 und 1,04, bis $K(q)$ etwa 3200 € beträgt.
d) $q \approx 1{,}033$ bedeutet $p \approx 3{,}3\,\%$ Zinsen pro Jahr. Der Zinssatz ist der Anteil des Faktors über 1.

Lösung zu Aufgabe 20

a) $f(-x) = f(x)$: achsensymmetrisch. $f(0) = 4$. Gerader Grad, $a_n = 1 > 0$: beide Enden gehen nach oben. Nur gerade Hochzahlen; der Leitkoeffizient ist positiv.
b) $z^2 - 5z + 4 = 0$: $z = 1, 4$; $x = \pm 1, \pm 2$. $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$. Substitution $z = x^2$, dann zurück; daraus folgen die vier Linearfaktoren.
c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 4$, $x^2(x^2 - 5) = 0$: $x = 0$ (Berührung) und $x = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2{,}24$. Man setzt $f(x) = 4$ und klammert x^2 aus.
d) Beispiele: $x^4 + 1$ hat keine, x^4 hat eine (vierfache), $x^2(x^2 + 1)$ hat eine, $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ hat zwei, $x(x-1)(x+1)(x^2+1)$ hat drei, $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$ hat vier Nullstellen. Mehr als vier sind unmöglich. Eine Funktion vierten Grades hat höchstens vier Nullstellen.