Lösungen zur Klassenarbeit - Exponentialfunktionen und Wachstum

Klasse: Klasse 10 · Dauer: 45 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) Bei exponentiellem Wachstum ist der Quotient aufeinanderfolgender Werte konstant. Hier: $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{40}{20} = 2$. Die Differenzen 5, 10, 20 wachsen dagegen, also liegt kein lineares Wachstum vor (1 P.).
b) Ansatz $f(x) = a \cdot b^x$: Der Startwert bei $x = 0$ ist $a = 5$, der Faktor $b = 2$. Also $f(x) = 5 \cdot 2^x$ (1 P.).
c) $f(5) = 5 \cdot 2^5 = 5 \cdot 32 = 160$ (1 P.). Man kann auch die Tabelle fortsetzen: $40 \to 80 \to 160$.
d) Eine Abnahme um $7\,\%$ lässt $93\,\%$ übrig, also $b = 1 - 0{,}07 = 0{,}93$ (1 P.). Da $0 < b < 1$ gilt, beschreibt dieser Faktor exponentielle Abnahme. Antwort: konstanter Quotient 2; $f(x) = 5 \cdot 2^x$; $f(5) = 160$; $b = 0{,}93$.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Bei $x = 0$ gilt $b^0 = 1$, daher ist $f(0) = a$. Aus $P(0|4)$ folgt sofort $a = 4$ (1 P.).
b) Mit $Q(3|32)$: $4 \cdot b^3 = 32$, also $b^3 = 8$. Die dritte Wurzel liefert $b = 2$ (1 P.). Inhaltlich: Zwischen $x = 0$ und $x = 3$ wird dreimal mit b multipliziert, insgesamt mit dem Faktor 8.
c) $f(5) = 4 \cdot 2^5 = 4 \cdot 32 = 128$ (1 P.).
d) $4 \cdot 2^x = 256$ wird durch 4 geteilt: $2^x = 64$. Wegen $2^6 = 64$ ist $x = 6$ (1 P.). Alternativ mit dem Logarithmus: $x = \log_2 64 = 6$. Probe: $4 \cdot 64 = 256$. Antwort: $f(x) = 4 \cdot 2^x$, $f(5) = 128$, $x = 6$.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Alle 6 Stunden halbiert sich die Menge: nach 6 h 320 mg, nach 12 h 160 mg, nach 18 h 80 mg (1 P.).
b) Die Zahl der Halbwertszeiten nach t Stunden ist $\frac{t}{6}$. Damit $m(t) = 640 \cdot 0{,}5^{t/6}$ (1 P.). Probe: $m(6) = 640 \cdot 0{,}5 = 320$.
c) 15 h entsprechen $2{,}5$ Halbwertszeiten: $m(15) = 640 \cdot 0{,}5^{2{,}5} \approx 640 \cdot 0{,}1768 \approx 113{,}1$ mg (1 P.). Der Wert liegt plausibel zwischen 160 und 80 mg.
d) $640 \cdot 0{,}5^{t/6} = 10$ führt auf $0{,}5^{t/6} = \frac{10}{640} = \frac{1}{64} = 0{,}5^6$. Exponentenvergleich: $\frac{t}{6} = 6$, also $t = 36$ h (1 P.). Antwort: Nach 36 Stunden, also eineinhalb Tagen, sind nur noch 10 mg im Körper.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) Zinsfaktor $q = 1{,}04$. Nach sechs Jahren: $K_6 = 3000 \cdot 1{,}04^6 \approx 3000 \cdot 1{,}26532 \approx 3795{,}96$ € (1 P.).
b) Die Zinsen sind der Zuwachs: $3795{,}96 - 3000 = 795{,}96$ € (1 P.).

c) Gesucht ist n mit $3000 \cdot 1{,}04^n > 4000$, also $1{,}04^n > \frac{4}{3} \approx 1{,}333$. Probieren: $1{,}04^7 \approx 1{,}316$ reicht nicht, $1{,}04^8 \approx 1{,}369$ reicht. Nach 8 Jahren (1 P.). Mit Logarithmus: $n = \frac{\lg(4/3)}{\lg 1{,}04} \approx 7{,}33$, aufgerundet 8.
d) Einfache Zinsen: jedes Jahr $3000 \cdot 0{,}04 = 120$ €, nach sechs Jahren $3000 + 720 = 3720$ €. Mit Zinseszins sind es $3795{,}96 - 3720 \approx 76$ € mehr, weil auch die Zinsen verzinst werden (1 P.).

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

a) Anfangsfläche $2\,\mathrm{m}^2$, wöchentliche Zunahme $40\,\%$, also Faktor $1{,}4$: $A(t) = 2 \cdot 1{,}4^t$ (1 P.).
b) $A(6) = 2 \cdot 1{,}4^6 \approx 2 \cdot 7{,}53 \approx 15{,}1\,\mathrm{m}^2$ (1 P.).
c) Die Hälfte des Teichs sind $60\,\mathrm{m}^2$. Wertetabelle: $A(10) \approx 57{,}9 < 60$, $A(11) \approx 81{,}0 > 60$. Also ist nach 11 Wochen mehr als die Hälfte bedeckt (1 P.).
d) Ganz bedeckt bedeutet $120\,\mathrm{m}^2$: $A(12) \approx 113{,}4 < 120$ und $A(13) \approx 158{,}7 > 120$. Nach 13 Wochen (1 P.). Bemerkenswert: Von halb bis ganz bedeckt vergehen nur etwa zwei Wochen, weil das Wachstum immer schneller wird. Kritik am Modell: Mehr als $120\,\mathrm{m}^2$ ist unmöglich, das Wachstum muss vorher gebremst werden.