Lernzettel - Exponentialfunktionen und Wachstum

Klasse: Klasse 10

Bakterien, die sich jede Stunde verdoppeln, ein Guthaben mit Zinseszins, die Ausbreitung einer Nachricht im Netz: Überall dort wird in jedem Schritt mit demselben Faktor multipliziert. Das beschreiben Exponentialfunktionen.

Einstieg: Der Seerosenteich

Auf einem Teich wächst eine Seerose. Die bedeckte Fläche verdoppelt sich jeden Tag. Nach 30 Tagen ist der ganze Teich bedeckt. Wann war er zur Hälfte bedeckt? Viele antworten „nach 15 Tagen“. Richtig ist: nach 29 Tagen, denn ein Tag später hat sich die Fläche verdoppelt. Bei exponentiellem Wachstum wird nicht immer dasselbe addiert, sondern immer derselbe *Faktor* multipliziert. Das erklärt, warum Zinsen, Bakterien, Epidemien und radioaktiver Zerfall so stark von unserer Alltagserfahrung abweichen. In diesem Kapitel lernst du, solche Vorgänge mit Funktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ zu beschreiben und zu berechnen.

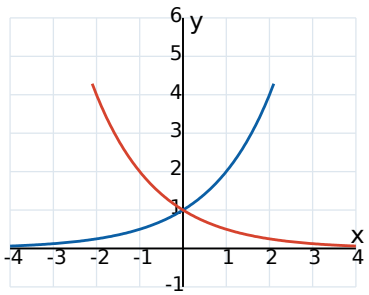
Exponentialfunktion

Definition: Exponentialfunktion

Bei **linearem Wachstum** kommt in jedem Schritt dieselbe Zahl dazu. Bei **exponentiellem Wachstum** wird in jedem Schritt mit demselben Faktor multipliziert. Die Funktion heißt **Exponentialfunktion**:

$$f(x) = a \cdot b^x \text{ mit } a \neq 0,\ b > 0,\ b \neq 1$$

$a = f(0)$ ist der **Anfangswert**, b der **Wachstumsfaktor**. Die Variable steht im Exponenten, nicht in der Basis. Das ist der Unterschied zu den Potenzfunktionen.



Blau: $y = 2^x$ (Wachstum). Rot: $y = 0{,}5^x$ (Zerfall). Beide gehen durch $(0|1)$.

Merke: Wachstum und Zerfall

Für $b > 1$ wächst die Funktion, für 0 fällt sie (**exponentieller Zerfall**). Der Graph schneidet die y-Achse bei a, schneidet die x-Achse nie und nähert sich ihr nur an: Die

x-Achse ist die **waagerechte Asymptote**. Für $a > 0$ ist die Wertemenge $]0;\infty[$.

Prozentuale Änderung

Satz: Wachstumsfaktor

Ändert sich eine Größe pro Schritt um $p\,\%$, gilt $b = 1 + \frac{p}{100}$. Bei Zunahme um 5 % ist $b = 1{,}05$, bei Abnahme um 8 % ist $b = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$. Nach n Schritten ist der Bestand $B(n) = B_0 \cdot b^n$.

Beispiel 1: Zinseszins

Anna legt 2000 € zu 3 % Zinsen pro Jahr an. Wie viel hat sie nach 4 Jahren?

Der Faktor ist $1{,}03$. Nach 4 Jahren: $2000 \cdot 1{,}03^4 \approx 2251{,}02$ €.

Beim linearen Wachstum mit 60 € pro Jahr wären es nur 2240 €. Der Unterschied wächst mit der Zeit.

So gehst du vor: Parameter aus zwei Punkten bestimmen

1. Aus $f(0)$ liest du a ab (oder setze einen Punkt ein).
2. Setze den zweiten Punkt ein und löse nach b^x auf.
3. Ziehe die Wurzel (nur positive Basis b ist erlaubt).
4. Mache die Probe mit beiden Punkten.

Beispiel 2: Parameter bestimmen

Eine Exponentialfunktion erfüllt $f(0) = 3$ und $f(2) = 12$. Wie lautet sie?

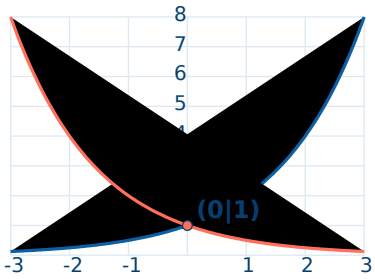
Aus $f(0) = a$ folgt $a = 3$. Dann $3 \cdot b^2 = 12$, also $b^2 = 4$ und $b = 2$.

Die Funktion lautet $f(x) = 3 \cdot 2^x$. Probe: $f(2) = 3 \cdot 4 = 12$.

Linear oder exponentiell: Wie wächst eine Größe?

Bei einem linearen Vorgang kommt in gleichen Zeitabschnitten immer derselbe Betrag dazu. Ein Sparschwein, in das du jede Woche 5 € wirfst, wächst linear. Bei einem exponentiellen Vorgang wird in gleichen Zeitabschnitten immer mit demselben Faktor multipliziert. Ein Konto mit 3 % Zinsen im Jahr wächst jedes Jahr um 3 % des aktuellen Betrags, also in Euro von Jahr zu Jahr stärker. Du erkennst den Typ in einer Wertetabelle an den *Quotienten* aufeinanderfolgender Werte: Sind sie konstant, liegt exponentielles Wachstum vor, sind die *Differenzen* konstant, ist es linear. Der Graph einer Exponentialfunktion schneidet die y-Achse bei $(0|a)$, nähert sich für wachsendes x (bei $b > 1$) immer steiler und für fallendes x beliebig nahe der x-Achse, ohne sie zu erreichen. Die x-Achse ist deshalb waagerechte Asymptote. Die Graphen von b^x und $\left(\frac{1}{b}\right)^x$ liegen

spiegelbildlich zur y-Achse.



Beispiel 5: Bakterienkultur

Eine Kultur enthält zu Beginn 1000 Bakterien. Ihre Anzahl verdoppelt sich alle 20 Minuten. Wie viele Bakterien sind es nach 2 Stunden, und wie lautet die Funktion?

In 2 Stunden = 120 Minuten liegen $120 : 20 = 6$ Verdopplungszeiten. Also ist $N = 1000 \cdot 2^6 = 64\,000$. Allgemein gilt $N(t) = 1000 \cdot 2^{t/20}$ mit t in Minuten. Wer in Stunden rechnen will, schreibt $N(t) = 1000 \cdot 2^{3t} = 1000 \cdot 8^t$, denn in einer Stunde verdoppelt sich die Kultur dreimal. Beide Funktionen beschreiben dasselbe Wachstum, nur mit anderer Zeiteinheit.

Beispiel 6: Wertverlust eines Autos

Ein neues Auto kostet 24 000 €. Es verliert jedes Jahr 8 % seines Wertes. Wie viel ist es nach 5 Jahren wert?

Eine Abnahme um 8 % bedeutet, dass 92 % bleiben. Der Wachstumsfaktor ist daher $b = 0{,}92$. Es folgt $f(5) = 24\,000 \cdot 0{,}92^5 \approx 24\,000 \cdot 0{,}659 \approx 15\,818$ €. Nach 5 Jahren hat das Auto also gut ein Drittel seines Wertes verloren. Beachte: Es werden nicht $5 \cdot 8\,\% = 40\,\%$ abgezogen, denn jedes Jahr bezieht sich die Abnahme auf den bereits verringerten Wert.

Achtung: Typische Fehler

Erstens: Der Wachstumsfaktor bei 5 % Zunahme ist $1{,}05$ und nicht $0{,}05$. Zweitens: Ein Wachstum von 100 % pro Zeitabschnitt bedeutet eine Verdopplung (Faktor 2), nicht eine Verdreifachung. Drittens: Prozente lassen sich nicht einfach addieren: Zwei Jahre mit je 10 % Zunahme ergeben $1{,}1^2 = 1{,}21$, also 21 % und nicht 20 %. Viertens: Bei Zerfall ist 0; bei $b = 0{,}97$ nimmt der Bestand um 3 % ab, er wird niemals negativ.

So gehst du vor: Wachstum modellieren

1. Lies den Anfangswert a (Bestand bei $x = 0$) aus dem Text ab.
2. Bestimme den Wachstumsfaktor b pro Zeiteinheit: bei $p\,\%$ Zunahme $b = 1 + \frac{p}{100}$, bei Abnahme $b = 1 - \frac{p}{100}$, bei Verdopplungszeit T gilt $b = 2^{1/T}$, bei Halbwertszeit $b = 0{,}5^{1/T}$.

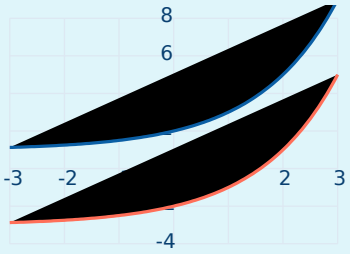
3. Schreibe die Funktion $f(x) = a \cdot b^x$ und achte darauf, dass x in der Zeiteinheit von b gemessen wird.
4. Berechne gesuchte Werte mit dem Taschenrechner und runde sinnvoll.
5. Beurteile das Ergebnis: Ist es realistisch? Exponentielles Wachstum kann nicht unbegrenzt weitergehen.

Die Faustregel zur Verdopplungszeit

Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital bei $p\,\%$ Zinsen verdoppelt? Die Gleichung $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^T = 2$ lässt sich nur mit dem Logarithmus exakt lösen. Als Faustregel für kleine Prozentsätze dient die „72er-Regel“: $T \approx \frac{72}{p}$. Bei 4 % ergibt sie 18 Jahre, der genaue Wert beträgt 17,67 Jahre. Mit der Regel kannst du Wachstumsvorgänge schnell im Kopf einschätzen: Eine Stadt, die jährlich um 2 % wächst, verdoppelt ihre Einwohnerzahl in etwa 36 Jahren. Eine Wirtschaft mit 3 % Wachstum verdoppelt sich in 24 Jahren.

Beispiel 7: Verschobene Exponentialfunktion

Beschreibe die Graphen von $f(x) = 2^x + 1$ und $g(x) = 2^x - 3$.



Der Graph von f entsteht aus dem Graphen von 2^x, indem man ihn um 1 nach oben verschiebt. Die Asymptote ist $y = 1$, der y-Achsenabschnitt ist $f(0) = 2$. Für f gibt es keine Nullstelle, denn $2^x + 1 > 1$. Der Graph von g ist um 3 nach unten verschoben, die Asymptote ist $y = -3$, der y-Achsenabschnitt ist $g(0) = -2$. Die Nullstelle von g liegt dort, wo $2^x = 3$ ist, also bei $x \approx 1{,}58$.

Wusstest du? Reiskörner und Papierfalten

Der Legende nach wünschte sich der Erfinder des Schachspiels auf dem ersten Feld ein Reiskorn, auf dem zweiten zwei, auf dem dritten vier und so weiter. Auf dem 64. Feld liegen 2^{63} Körner, insgesamt über $1{,}8 \cdot 10^{19}$: mehr, als jemals geerntet wurde. Ähnlich überraschend ist das Falten von Papier. Ein Blatt ist etwa 0,1 mm dick. Würde man es 42-mal falten, hätte der Stapel eine Dicke von rund 440 000 Kilometern und würde den Mond erreichen. Praktisch lässt sich Papier nur etwa siebenmal falten, aber das Rechenbeispiel zeigt, wie schnell exponentielles Wachstum die Vorstellungskraft übersteigt.

Grenzen des Modells

Exponentielles Wachstum beschreibt Vorgänge nur für eine begrenzte Zeit. Bakterien in einer Petrischale vermehren sich zunächst exponentiell, doch der Nährstoff wird knapp, und das Wachstum bremst sich ab. Auch eine Epidemie verläuft anfangs exponentiell, bis viele Menschen immun sind. Beim Zerfall radioaktiver Stoffe dagegen passt das Modell sehr genau, weil jedes Atom unabhängig von den anderen zerfällt. Frage dich deshalb bei jeder Aufgabe: Für welchen Zeitraum ist das Modell sinnvoll?

Hinweis: Zeiteinheit beachten

Viele Fehler entstehen, weil der Wachstumsfaktor zu einer anderen Zeiteinheit gehört als die Zeitangabe in der Aufgabe. Ein Faktor von 1,05 pro Jahr darf nicht mit Monaten als Exponent verwendet werden. Schreibe deshalb zu jeder Funktion dazu, was x bedeutet, und rechne gegebenenfalls Monate in Jahre oder Minuten in Stunden um, bevor du einsetzt. Bei einer Halbwertszeit von 8 Tagen ist $t/8$ die Anzahl der Halbierungen, und genau dieser Quotient steht im Exponenten.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Eine Exponentialfunktion hat die Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$; a ist der Anfangswert $f(0)$.
- Wachstumsfaktor: $b = 1 + \frac{p}{100}$ bei $p\,\%$ Zunahme, $b = 1 - \frac{p}{100}$ bei $p\,\%$ Abnahme; für $b > 1$ wächst, für 0 fällt die Funktion.
- Linear heißt gleiche Differenzen, exponentiell heißt gleiche Quotienten benachbarter Funktionswerte.
- Aus zwei Punkten: $b^{x_2 - x_1} = \frac{y_2}{y_1}$, danach $a = \frac{y_1}{b^{x_1}}$.
- Verdopplungszeit T: $b = 2^{1/T}$; Halbwertszeit T: $b = 0{,}5^{1/T}$.
- Der Graph läuft durch $(0|a)$, hat die x-Achse als Asymptote; $+c$ verschiebt die Asymptote auf $y = c$.
- Die Gleichung $b^x = c$ löst man mit dem Logarithmus oder durch systematisches Probieren.
- Faustregel: Verdopplungszeit $\approx \frac{72}{p}$ Jahre bei $p\,\%$ Zinsen; das Modell gilt nur in einem begrenzten Zeitraum.

Achtung

5 % Zunahme sind der Faktor $1{,}05$, nicht $0{,}05$ oder 5. Bei 20 % Abnahme rechnest du mit $0{,}8$, nicht mit $1{,}2$. Und $2 \cdot 3^x$ ist nicht $(2 \cdot 3)^x$: Die Potenz wird vor dem Malnehmen berechnet.

Halbwertszeit und Verdopplungszeit

Definition: Halbwertszeit und Verdopplungszeit

Die **Halbwertszeit** ist die Zeit, in der sich eine fallende Größe halbiert, die **Verdopplungszeit** die Zeit, in der sich eine wachsende Größe verdoppelt. Bei einer Exponentialfunktion sind beide konstant, egal wo man startet. Hat eine Substanz die Halbwertszeit T, gilt $m(t) = m_0 \cdot 0{,}5^{t/T}$.

Beispiel 3: Radioaktiver Zerfall

Von 80 g einer Substanz mit Halbwertszeit 5 Tagen: Wie viel ist nach 15 Tagen übrig?

Nach 5 Tagen 40 g, nach 10 Tagen 20 g, nach 15 Tagen 10 g. Mit der Formel: $m(15) = 80 \cdot 0{,}5^{15/5} = 80 \cdot 0{,}5^3 = 10$ g.

Gleichungen mit der Variablen im Exponenten

Möchtest du wissen, wann ein Wert erreicht wird, löst du Gleichungen wie $200 \cdot 2^t = 6400$. Zuerst teilen: $2^t = 32$. Dann erkennst du $32 = 2^5$, also $t = 5$. Lässt sich die Zahl nicht als glatte Potenz schreiben, probierst du systematisch mit dem Taschenrechner oder nutzt den Logarithmus (Kapitel Logarithmen). Zum Beispiel ist $1{,}1^7 \approx 1{,}95$ und $1{,}1^8 \approx 2{,}14$: Bei 10 % Wachstum hat sich der Bestand nach 8 Schritten verdoppelt.

Beispiel 4: Wachstum erkennen

Eine App hat in vier Monaten 400, 460, 529, 608,35 Nutzer. Welches Wachstum liegt vor, und wie viele Nutzer sind es nach einem halben Jahr?

Die Differenzen (60; 69; 79,35) sind nicht konstant, die Quotienten schon: $460 : 400 = 1{,}15$ und $529 : 460 = 1{,}15$.

Es liegt exponentielles Wachstum mit $b = 1{,}15$ vor, also 15 % mehr pro Monat: $N(t) = 400 \cdot 1{,}15^t$.

Nach einem halben Jahr: $400 \cdot 1{,}15^6 \approx 925$ Nutzer.

Merke: Linear oder exponentiell?

Der lineare Graph ist eine Gerade, der exponentielle krümmt sich immer stärker nach oben. Auf lange Sicht überholt jede Exponentialfunktion mit $b > 1$ jede lineare Funktion. Kein Bestand kann aber unbegrenzt exponentiell wachsen, deshalb sind solche Modelle nur für begrenzte Zeit realistisch.

Merke: Verschiebungen

Der Graph von $g(x) = 2^x + 3$ ist um 3 nach oben verschoben, die Asymptote ist $y = 3$. Der Graph von $h(x) = 2^{x-1}$ ist um 1 nach rechts verschoben und entspricht $\frac{1}{2} \cdot 2^x$.

Hinweis

Beim Wachstum addierst du immer dasselbe, beim exponentiellen Wachstum multiplizierst du mit demselben Faktor. Das Gesamtwachstum nach zwei Jahren ist b^2, nicht $2p$.

Ottos Tipp

Frage dich immer: Kommt jedes Mal dasselbe dazu oder wird jedes Mal mit derselben Zahl multipliziert? Im zweiten Fall ist es eine Exponentialfunktion. Baue dir eine Tabelle und teile zwei aufeinanderfolgende Werte: Kommt immer derselbe Quotient heraus, hast du b gefunden.