Arbeitsblatt - Exponentialfunktionen und Wachstum

Klasse: Klasse 10 · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Wertetabellen

Berechne die Funktionswerte der beiden Exponentialfunktionen und ergänze die Tabelle.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3 \cdot 2^x$	?	?	?	?	?	?
$g(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$	?	?	?	?	?	?

a) Berechne $f(x) = 3 \cdot 2^x$ für alle x der Tabelle.
b) Berechne $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$ für alle x der Tabelle.
c) Welche Funktion wächst, welche fällt? Woran erkennst du das an den Werten?

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Prozent und Faktor

Ergänze die Tabelle: Bestimme den Wachstumsfaktor bzw. gib die prozentuale Veränderung an.

Veränderung	Wachstumsfaktor
Zunahme um 5 %	?
Abnahme um 12 %	?
Zunahme um 150 %	?
Abnahme um 0,5 %	?
Faktor 1,2 bedeutet	?
Faktor 0,7 bedeutet	?

a) Berechne die vier Faktoren der oberen Zeilen.
b) Gib die prozentuale Änderung bei Faktor 1,2 und bei Faktor 0,7 an.
c) Ein Preis steigt zweimal hintereinander um 10 %. Um wie viel Prozent hat er insgesamt zugenommen?

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Linear oder exponentiell?

In der Tabelle sind vier Wertereihen angegeben. Entscheide für jede, ob sie linear,

exponentiell oder keines von beiden ist.

	x=0	x=1	x=2	x=3
A	2	6	18	54
B	5	8	11	14
C	80	40	20	10
D	100	90	81	72,9

a) Untersuche Reihe A und B mit Differenzen und Quotienten.
b) Untersuche Reihe C und D.
c) Gib für jede exponentielle Reihe die Funktionsgleichung an.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Gleichungen aufstellen

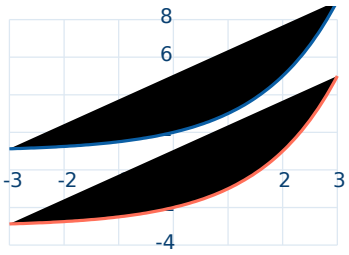
Bestimme jeweils die Gleichung $f(x) = a \cdot b^x$ der Exponentialfunktion, deren Graph durch die beiden Punkte geht. Schreibe die Rechnung auf.

a) $A(0|3)$ und $B(2|12)$
b) $P(1|6)$ und $Q(3|54)$
c) $R(1|10)$ und $S(2|5)$
d) $U(-1|8)$ und $V(1|2)$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Verschobene Graphen

Gegeben sind vier Funktionen. Bestimme die Gleichung der Asymptote und den y-Achsenabschnitt und beschreibe, wie der Graph aus dem Graphen von $y = 2^x$ entsteht.



a) $f(x) = 2^x + 1$
b) $g(x) = 2^x - 3$
c) $h(x) = 2^{x+1}$
d) $k(x) = -2^x$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Ein Sparbuch für das Studium

Lena legt 2500 € zu einem Zinssatz von 3 % pro Jahr an. Die Zinsen werden jedes Jahr

mitverzinst.

a) Wie lautet die Funktion $K(n)$ für das Kapital nach n Jahren?
b) Berechne das Kapital nach 5 Jahren und nach 10 Jahren.
c) Wie viel Zinsen hat sie nach 10 Jahren insgesamt erhalten?
d) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital etwa verdoppelt? Verwende die 72er-Regel und prüfe mit dem Taschenrechner.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Die Bakterienkultur

In einem Labor werden Bakterien gezüchtet. Zu Beginn sind es 500 Bakterien. Ihre Zahl verdoppelt sich alle 30 Minuten.

a) Wie viele Bakterien sind es nach 3 Stunden, wie viele nach 4,5 Stunden?
b) Stelle eine Funktion $N(t)$ für die Anzahl nach t Stunden auf.
c) Wann sind es erstmals mehr als eine Million Bakterien?
d) Warum kann das Modell nicht für einen sehr langen Zeitraum gelten?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der Wertverlust

Ein Neuwagen kostet 24 000 €. Er verliert jedes Jahr 15 % seines Wertes vom Vorjahr.

a) Berechne den Wert nach 1, 2 und 3 Jahren.
b) Wie hoch ist der Wert nach 5 Jahren? Wie viel Prozent des Neupreises sind das?
c) Nach wie vielen Jahren ist das Auto weniger als 8000 € wert?
d) Ein anderer Wagen verliert jedes Jahr 3000 € (linearer Wertverlust). Vergleiche beide Autos nach 5 Jahren.

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Oma schenkt Geld

Zur Geburt legen die Eltern Omas Geschenk von 1000 € an. Bank A zahlt 2,5 % Zinseszins pro Jahr. Bank B zahlt jedes Jahr 25 € feste Zinsen, ohne Zinseszins.

a) Berechne für beide Banken das Kapital nach 20 Jahren.
b) Um wie viel ist Bank A nach 20 Jahren besser?
c) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital bei Bank A etwa verdoppelt (Faustregel und Taschenrechner)?
d) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital bei Bank B verdoppelt?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Radioaktiver Zerfall

Das Iod-Isotop ^{131}I wird in der Medizin eingesetzt und hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Ein Patient erhält 80 mg einer Probe.

a) Wie viel Substanz ist nach 8, 16 und 24 Tagen noch vorhanden?
b) Stelle die Zerfallsfunktion $m(t)$ mit t in Tagen auf.
c) Wie viel ist nach 20 Tagen noch vorhanden?
d) Nach wie vielen Tagen sind weniger als 1 mg übrig?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Das Medikament im Blut

Ein Patient nimmt eine Tablette mit 200 mg Wirkstoff. Der Körper baut jede Stunde 20 % der vorhandenen Menge ab. Die Wirkung ist ausreichend, solange mindestens 50 mg im Blut sind.

a) Wie lautet der Wachstumsfaktor?
b) Wie viel Wirkstoff ist nach 3 Stunden noch im Blut?
c) Wann sinkt die Menge unter 50 mg?
d) Nach wie vielen Stunden sind nur noch 100 mg vorhanden?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Wachstum einer Stadt

Eine Stadt hat 120 000 Einwohner und wächst jedes Jahr um 1,8 %. Die Nachbargemeinde hat 8000 Einwohner und schrumpft jedes Jahr um 2 %.

Ort	Einwohner heute	Veränderung pro Jahr
Stadt	120 000	+1,8 %
Gemeinde	8000	−2 %

a) Wie viele Einwohner hat die Stadt in 10 Jahren?
b) Wie viele Einwohner hat die Gemeinde in 10 Jahren?
c) Nach wie vielen Jahren hat die Gemeinde nur noch die Hälfte der heutigen Einwohner (Faustregel und Rechner)?
d) Wie lange dauert es, bis sich die Einwohnerzahl der Stadt verdoppelt hat?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Die Algen im Teich

Auf einem Teich mit 256 m² Wasserfläche breiten sich Algen aus. Heute bedecken sie 1 m². Ihre Fläche verdoppelt sich jede Woche. Die Gartenbesitzerin will eingreifen, bevor die Hälfte der Fläche bedeckt ist.

Woche	0	1	2	3	4
Fläche in m²	1	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Nach wie vielen Wochen ist der Teich ganz bedeckt?
c) Wann ist die Hälfte bedeckt? Wie viel Zeit bleibt bis zum vollständigen Zuwachsen?
d) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Fläche pro Woche nur um 50 % wächst?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Der heiße Tee

Ein Tee hat zu Beginn 90 °C, die Zimmertemperatur beträgt 20 °C. Der Temperaturunterschied zum Zimmer nimmt alle 5 Minuten auf 70 % des vorherigen Wertes ab. Tee kann man ab etwa 60 °C trinken.

Zeit in min	0	5	10	15
Unterschied in °C	70	?	?	?
Temperatur in °C	90	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle.
b) Wie lautet die Funktion $D(t)$ für den Temperaturunterschied nach t Minuten?
c) Nach wie vielen Minuten ist der Tee trinkbar (höchstens 60 °C)?
d) Welche Temperatur hat der Tee nach einer Stunde? Was zeigt das für den Verlauf?

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Zwei Sparangebote

Familie Weber will 2000 € für 20 Jahre anlegen und vergleicht zwei Angebote.

Angebot	Anfangskapital	Entwicklung
A	2000 €	3,5 % Zinseszins pro Jahr
B	2000 €	jedes Jahr feste 80 € Zinsen

Sie will wissen, wann Angebot A besser ist als B und welches Angebot sie wählen sollte, wenn sie das Geld 20 Jahre liegen lässt. Berechne dazu eine Tabelle mit den Werten nach 5, 10, 15 und 20 Jahren.
a) Stelle die Funktionen $A(n)$ und $B(n)$ auf.
b) Berechne beide Kapitalstände nach 5, 10, 15 und 20 Jahren.
c) Ab welchem Jahr ist A besser als B? Prüfe die Jahre 8 und 9.
d) Welches Angebot würdest du für 5 Jahre, welches für 20 Jahre wählen? Begründe.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Das Gerücht

An einer Schule mit 900 Schülern kennt am Montag um 8 Uhr ein Schüler ein Gerücht. Jede Stunde erzählt jeder, der es kennt, es genau zwei weiteren Schülern, die es noch nicht kennen. Damit verdreifacht sich die Zahl der Wissenden pro Stunde.

Stunde	0	1	2	3	4
Wissende	1	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle und gib die Funktion $W(t)$ an.
b) Nach wie vielen Stunden kennen mehr als 900 Schüler das Gerücht (wenn es keine Begrenzung gäbe)?
c) Warum stimmt das Modell nach einiger Zeit nicht mehr?

d) Wie sähe die Tabelle bei einer Verdopplung pro Stunde aus? Wann wären 900 überschritten?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Papier falten

Ein Blatt Papier ist 0,1 mm dick. Man faltet es immer wieder in der Mitte (in Gedanken, ohne Grenzen). Nach jeder Faltung verdoppelt sich die Dicke.

Faltungen	0	10	20	30	42
Dicke	0,1 mm	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle. Rechne nach 10 Faltungen in Millimeter, danach in Meter bzw. Kilometer.
b) Wie viele Faltungen braucht man, damit der Stapel höher als der Eiffelturm (330 m) ist?
c) Die Entfernung zum Mond beträgt rund 384 400 km. Reichen 42 Faltungen?
d) In der Realität schafft man etwa 7 Faltungen. Wie dick ist der Stapel dann?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Follower wachsen

Ein Schülerclub startet einen Videokanal mit 800 Followern. Er wächst jede Woche um 12 %. Ein anderer Club hat ebenfalls 800 Follower und gewinnt jede Woche 100 neue dazu.

Woche	0	4	8	12
Club A (+12 %)	800	?	?	?
Club B (+100)	800	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle für beide Clubs.
b) Nach wie vielen Wochen hat Club A mehr als 10 000 Follower?
c) Nach wie vielen Wochen hat Club B so viele?
d) Ab welcher Woche liegt Club A vor Club B? Begründe, warum das Wachstum von A langfristig stärker ist.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Hefeteig

Ein Bäcker misst das Volumen eines Hefeteigs, der in einer Schüssel aufgeht.

Zeit t in h	0	1	2	3
Teigvolumen V in ml	300	390	507	659

a) Zeige, dass der Teig exponentiell wächst, und bestimme den Wachstumsfaktor und die Funktionsgleichung.
b) Welches Volumen erwartest du nach 5 Stunden?

c) Wann hat der Teig ein Volumen von 1 Liter?
d) Die Schüssel fasst 1,5 Liter. Ab wann würde der Teig überlaufen? Wie bewertest du das Modell?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Verdopplungszeit und Zinssatz

Je höher der Zinssatz p, desto kürzer ist die Verdopplungszeit T. Die Gleichung heißt $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{T}=2$. Die 72er-Regel liefert die Näherung $T \approx \frac{72}{p}$.

Zinssatz p	2 %	3 %	4 %	6 %	8 %	12 %
Verdopplungszeit exakt	?	?	?	?	?	?
72er-Regel	?	?	?	?	?	?

a) Ergänze die Tabelle mit zwei Nachkommastellen für die exakten Werte (mit dem Logarithmus oder Probieren).
b) Bei welchem Zinssatz ist die Abweichung der 72er-Regel am kleinsten? Begründe aus der Tabelle.
c) Welchen Zinssatz braucht man, um ein Kapital in genau 10 Jahren zu verdoppeln?
d) Erkläre in zwei Sätzen, warum bei halbem Zinssatz die Verdopplungszeit ungefähr doppelt so lang ist.